

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ГАУССОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Опубликовано: В кн. «Интеллектуальные системы в управлении, конструировании и образовании». Вып. 2/Под ред. А. А. Шелупанова. – Томск: STT, 2002. Стр. 19-27.

Необходимость в моделировании случайных полей возникает при поиске и разработке эффективных алгоритмов анализа, классификации и сегментации изображений различной природы [1]. Наиболее важное применение такие алгоритмы находят в задачах обнаружения, измерения и идентификации подвижных объектов методами согласованной фильтрации [2], а также при оценке помехозащищенности [3]. Такие задачи возникают при проектировании радиолокационных, телевизионных, инфракрасных и других систем общего и специального применения.

Одной из важных задач анализа изображений является текстурный анализ, нашедший широкое применение в дистанционном зондировании, медицинской диагностике, биологии, материаловедении, промышленной диагностике. Большинство изображений, получаемых при дистанционном зондировании Земли (изображения сельскохозяйственных угодий, лесистых участков, водной поверхности), изображений облачных покровов, шлифов металлов и других материалов при большом увеличении, хорошо описываются стохастическими структурами [4 – 7].

В последнее время моделирование случайных полей находит свое применение при разработке и анализе алгоритмов сжатия различных изображений.

Большинство реальных изображений и полей, анализируемых в задачах такого рода, являются по сути локально-однородными. Основой их представления могут быть гауссовы [8] или гаусс–марковские поля [9 – 11].

В практике математического моделирования наиболее часто возникает необходимость в моделировании случайных полей с равномерным, релеевским, нормальным, логарифмически нормальным, односторонним экспоненциальным и пуассоновским законами распределения. Аппроксимирующие выражения для корреляционных функций (КФ) могут быть выбраны по-разному, но при этом обычно исходят из следующих предположений. Математическое описание должно удовлетворять общим свойствам корреляционной функции и отображать характерные свойства реальных полей. Аппроксимирующее выражение может быть найдено обычными методами приближения к найденным экспериментальным результатам с большой точностью. Однако, высокая точность приближения бывает не только не нужна, но даже может быть нежелательна из-за ограниченной точности обработки результатов эксперимента, что может исказить физическую сущность явления [12]. При моделировании случайных полей обычно используют разделимую экспоненциальную функцию, экспоненциальную функцию с круговой симметрией, гауссоидальную функцию.

Данная статья посвящена моделированию дискретных однородных гауссовых случайных полей с корреляционными функциями перечисленного типа. Материал по моделированию таких полей разрознен. Задачей статьи является рассмотрение актуальных подходов к моделированию гауссовых полей и доведение результатов до практического использования при генерировании полей на персональных компьютерах (ПК).

Генерирование однородных нормальных случайных полей, как и стационарных нормальных случайных процессов, наиболее просто производится методом формирующего фильтра [13, 14]. По этому методу находится импульсная характеристика (ИХ) физически нереализуемого (некаузального) фильтра, которая будет симметрична относительно начала координат. При построении цифрового формирующего фильтра нерекурсивного типа каузальность (причинность) не важна. В противном случае, когда требуется физическая реализуемость, импульсная характеристика формирующего фильтра становится несимметричной и, более того, принимает нулевые значения в направлении отрицательных координат. Примеры реализаций физически реализуемых формирующих фильтров в одномерном случае, когда в качестве аргумента используется время, приведены в литературе [15]. В двумерном случае, когда в качестве аргументов используются пространственные координаты, каузальность определяется способом развертки. При этом, существуют два основных стандарта развертки изображений: отечественный – слева направо, сверху вниз и принятый в США – сверху вниз, слева направо. В этом случае фильтры могут быть как рекурсивными, так и нерекурсивными. Реализацию формирующего фильтра можно также связать со способами представления случайного поля: представление скользящим средним (СС) соответствует нерекурсивному фильтру, авторегрессионное (АР) и авторегрессионное со скользящим средним (АРСС) соответствуют рекурсивному фильтру [11].

Генерирование гауссового поля с помощью цифрового формирующего фильтра показано на рис. 1.

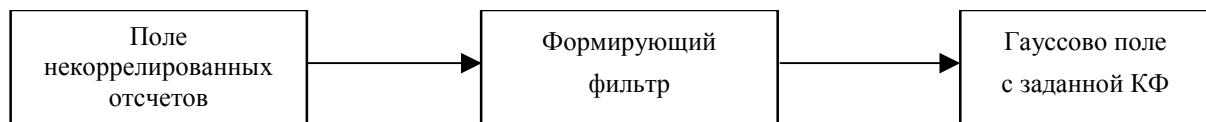


Рис.1. Алгоритм формирования гауссова поля

В результате обработки цифровым фильтром исходного поля отсчетов дискретного белого шума с нормальным законом распределения формируется выходное поле отсчетов также с нормальным законом распределения и требуемой функцией корреляции, определяемой импульсной характеристикой фильтра:

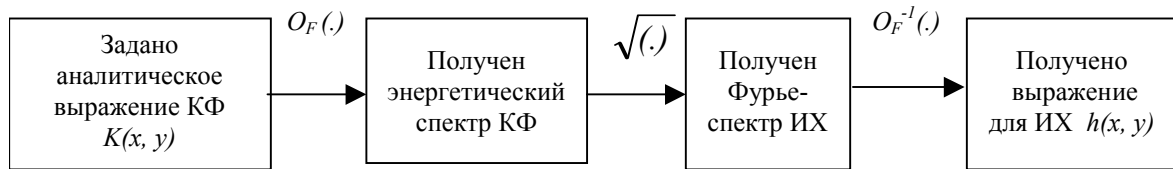
$$K(i, j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(m, n) \cdot h(m + i, n + j),$$

где i, j – дискретные пространственные координаты.

Для построения формирующего фильтра необходимо сначала сгенерировать в ПК массив отсчетов импульсной характеристики, который и будет основой построения нерекурсивного цифрового фильтра (массив нужно лишь ограничить по размерам и, соответствующим образом, пронормировать). Массив отсчетов ИХ можно сгенерировать двумя способами.

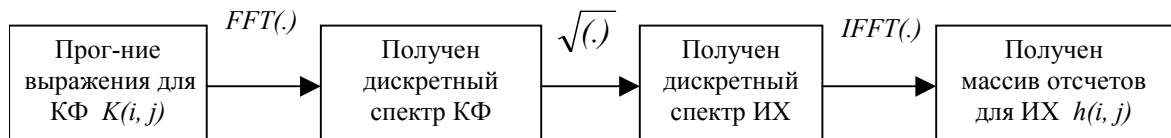
По первому способу исходя из заданной корреляционной функции аналитически находится выражение для импульсной характеристики (рис. 2), выражение программируется в ПК, программным путем сглаживается (аналитическое сглаживание, как правило, не приводит к замкнутым выражениям) и дискретизируется на квадратной решётке с шагом $\Delta = \Delta_x = \Delta_y$. Таким образом, получается массив отсчетов ИХ.

По второму способу массив отсчетов импульсной характеристики находится чисто программным путем с помощью быстрого преобразования Фурье (рис. 3). Идея этого метода в неявном виде отражена в [16].



$K(x, y)$ – корреляционная функция
 $O_F(.)$ – прямое преобразование Фурье
 $O_F^{-1}(.)$ – обратное преобразование Фурье
 $h(x, y)$ – импульсная характеристика
 x, y – пространственные координаты

Рис.2. Нахождение аналитического выражения для импульсной характеристики



$FFT(.)$ – алгоритм быстрого (дискретного) преобразования Фурье
 $IFFT(.)$ – алгоритм обратного преобразования БПФ

Рис.3. Генерирование поля отсчетов импульсной характеристики с помощью быстрого преобразования Фурье

Одно из важнейших применений дискретных преобразований Фурье – вычисление с их помощью цифровой свёртки сигналов [16]. На этой идее основан способ генерирования гауссовых полей в спектральной области (рис. 4).

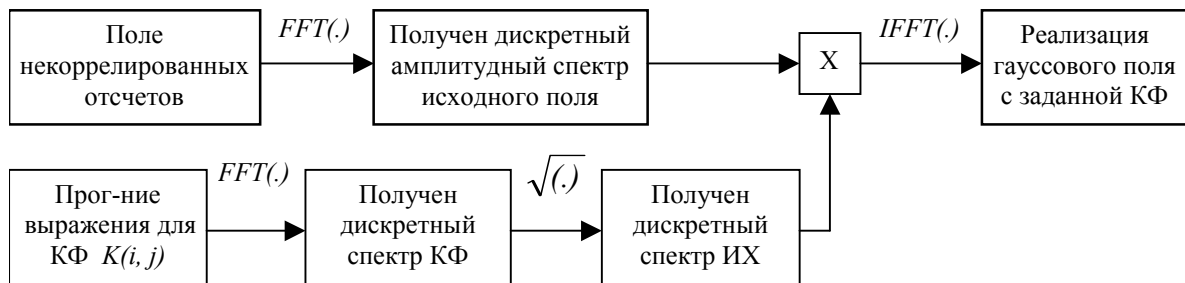


Рис. 4. Генерирование гауссова поля с использованием БПФ

Используя прямое (1) и обратное (2) двумерные преобразования Фурье [17], получим аналитические выражения для энергетических спектров корреляционных функций и соответствующих им импульсных характеристик:

$$F(\omega_x, \omega_y) = O_F\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-i(\omega_x x + \omega_y y)\} dx dy, \quad (1)$$

$$f(x, y) = O_F^{-1}\{F(\omega_x, \omega_y)\} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, \omega_y) \exp\{i(\omega_x x + \omega_y y)\} d\omega_x d\omega_y, \quad (2)$$

где ω_x, ω_y – пространственные частоты, а $i = \sqrt{-1}$.

Разделимая экспоненциальная корреляционная функция

$$K_1(\tau_x, \tau_y) = K \exp\{-(\alpha_x |\tau_x| + \alpha_y |\tau_y|)\}, \quad (3)$$

где τ_x, τ_y – аргументы корреляционной функции.

$$F_1(\omega_x, \omega_y) = O_F\{K_1(\tau_x, \tau_y)\} = \frac{4 K \alpha_x \alpha_y}{(\alpha_x^2 + \omega_x^2)(\alpha_y^2 + \omega_y^2)}, \quad (4)$$

$$h_1(x, y) = O_F^{-1}\left\{\sqrt{F_1(\omega_x, \omega_y)}\right\} = \frac{2}{\pi^2} \sqrt{K \alpha_x \alpha_y} K_o(\alpha_x |x|) K_o(\alpha_y |y|), \quad (5)$$

где $K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z ch(t)} ch(\nu t) dt$ – цилиндрическая функция.

Экспоненциальная корреляционная функция с эллиптической симметрией

$$K_2(\tau_x, \tau_y) = K \exp\left\{-\sqrt{\alpha_x^2 \tau_x^2 + \alpha_y^2 \tau_y^2}\right\} \quad (6)$$

$$F_2(\omega_x, \omega_y) = O_F\{K_2(\tau_x, \tau_y)\} = \frac{2 K \pi}{\alpha_x \alpha_y} \left(1 + \frac{\omega_x^2}{\alpha_x^2} + \frac{\omega_y^2}{\alpha_y^2}\right)^{-\frac{3}{2}}, \quad (7)$$

$$h_2(x, y) = O_F^{-1}\left\{\sqrt{F_2(\omega_x, \omega_y)}\right\} = \sqrt{\frac{K \alpha_x \alpha_y}{2 \pi}} \frac{\sqrt[4]{2}}{\Gamma(3/4)} z^{-\frac{1}{4}}(x, y) K_{\frac{1}{4}}\{z(x, y)\}, \quad (8)$$

где $z(x, y) = \sqrt{\alpha_x^2 x^2 + \alpha_y^2 y^2}$, $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$, $[\text{Re } z > 0]$ – гамма-функция.

Гауссоидальная корреляционная функция

$$K_3(\tau_x, \tau_y) = K \exp\{-(\beta_x^2 \tau_x^2 + \beta_y^2 \tau_y^2)\}, \quad (9)$$

$$F_3(\omega_x, \omega_y) = O_F\{K_3(\tau_x, \tau_y)\} = \frac{\pi K}{\beta_x \beta_y} \exp\left\{-\left(\frac{\omega_x^2}{4 \beta_x^2} + \frac{\omega_y^2}{4 \beta_y^2}\right)\right\}, \quad (10)$$

$$h_3(x, y) = O_F^{-1}\left\{\sqrt{F_3(\omega_x, \omega_y)}\right\} = 2 \sqrt{\frac{K \beta_x \beta_y}{\pi}} \exp\{-2(\beta_x^2 x^2 + \beta_y^2 y^2)\}. \quad (11)$$

Здесь $K(\tau_x, \tau_y), F(\omega_x, \omega_y), h(x, y)$ – корреляционная функция, энергетический спектр и импульсная характеристика формирующего фильтра.

Полученные выражения для энергетических спектров (4, 7, 10) имеют самостоятельное значение. Выражение (7) получено с использованием преобразования Ганкеля и существенно уточнено по сравнению с приведенным в монографии [17].

Следует отметить, что реализация однородного двумерного случайного поля возможна оптическим путем [14] с использованием телевизионного устройства для генерации белого шума и нейтральных светофильтров с изменением коэффициента пропускания по поверхности фильтров в соответствии с импульсной характеристикой (формирующей функцией в терминах работы [14]). Закон изменения коэффициента пропускания светофильтров может приниматься согласно выражениям (5, 8, 11) или аналогичным образом, исходя из требований к корреляционной функции.

На рис. 5 приведены дискретизированные корреляционные функции (3, 6, 9) и соответствующие им импульсные характеристики, полученные с помощью быстрого преобразования Фурье. Параметры корреляционных функций α_x , α_y , β_x , β_y и шаг пространственной дискретизации $\Delta = \Delta_x = \Delta_y$ выбирались такими, чтобы корреляция между соседними пикселями по горизонтали и вертикали была равной $r_x = r_y = 0,9$. Размеры массивов отсчетов корреляционных функций и импульсных характеристик равны 31×31 . Использование выражений для импульсных характеристик (5, 8, 11) и усреднения в пределах элемента разложения (пиксела) приводит к аналогичным результатам.

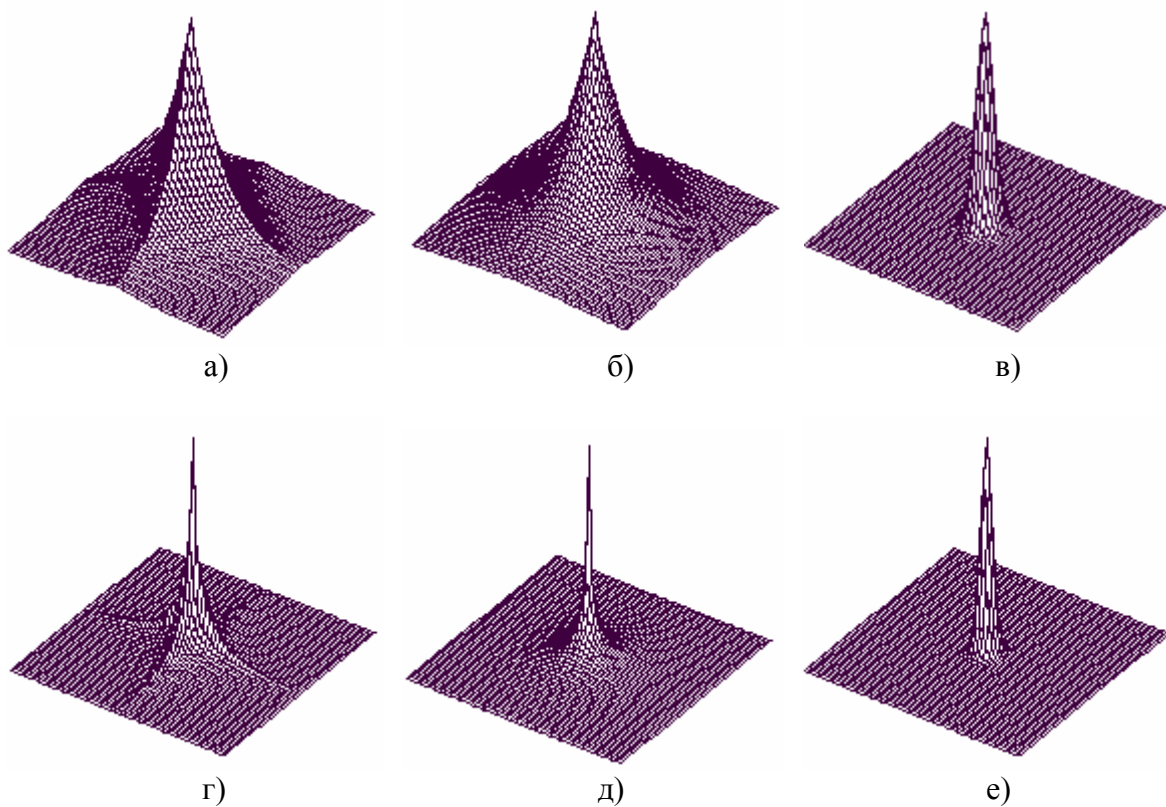


Рис.5. а, б, в – функции корреляции, г, д, е – импульсные характеристики

На рис. 6 а, б, в приведены примеры реализаций гауссовых полей с функциями корреляции (3, 6, 9). Коэффициенты корреляции соседних отсчетов сгенерированных полей равны $r_x = r_y = 0,9$. Размеры сгенерированных полей – 256×256 .

Использование при моделировании полей быстрого преобразования Фурье приводит к "замкнутым на себя" периодическим краевым условиям (случайное поле на двумерном торе). Модели случайных полей с краевыми условиями, замкнутыми на торе, могут рассматриваться как приближение к моделям на бесконечной решётке и обладают некоторыми полезными свойствами (например, упрощают формирование оцен-

ки максимального правдоподобия) [8, 11]. На рис. 6 г (рис. 6 б, свернутый в тор) отчетливо просматриваются совпадающие краевые условия.

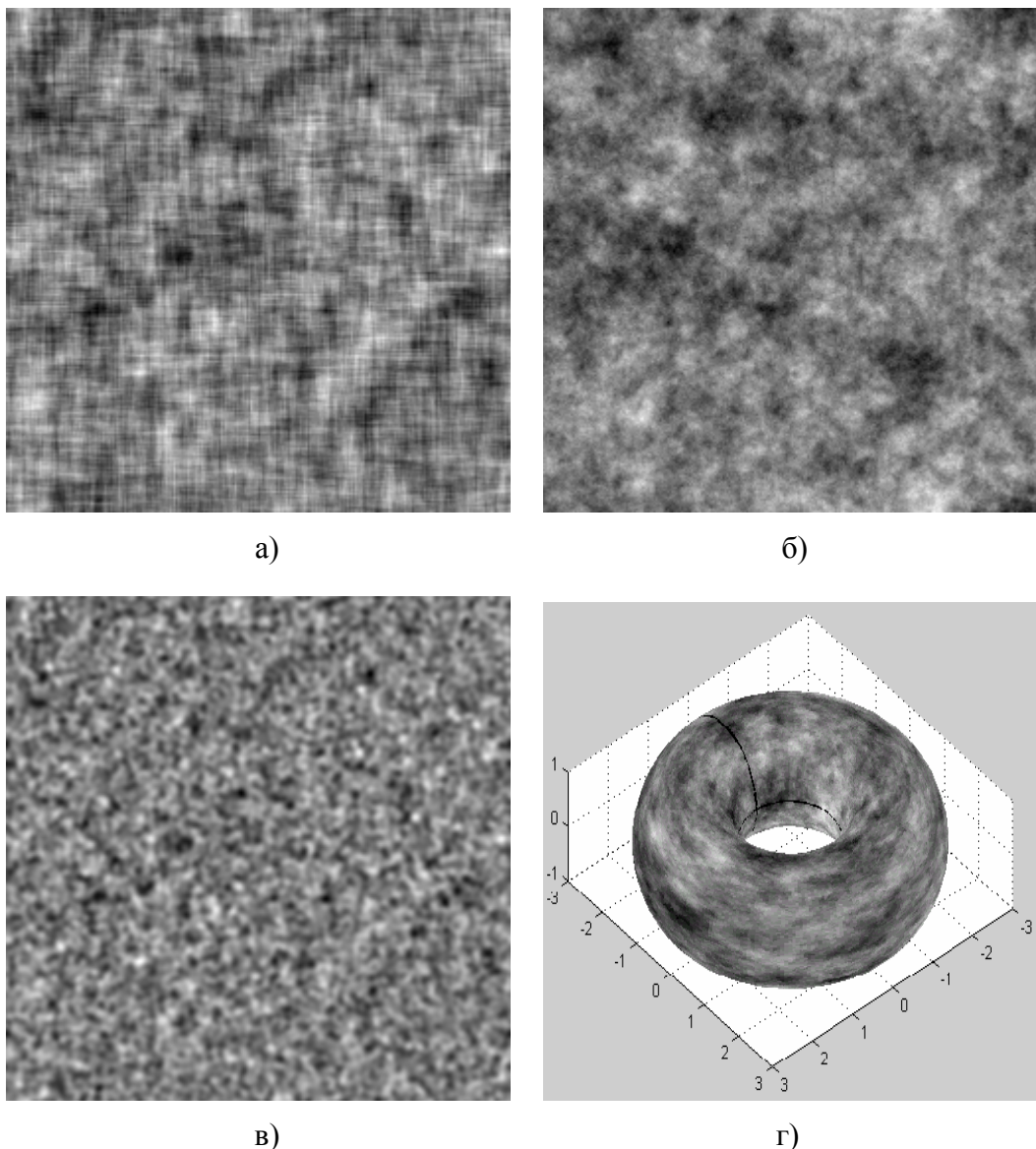


Рис.6. а, б, в – сгенерированные гауссовы поля,
г – случайное поле, замкнутое на торе

Результаты моделирования гауссовых случайных полей планируется использовать для препарирования полей [18], оптимизации оценок линейного предсказания, проверки алгоритмов выделения и последующего измерения параметров подвижных объектов, перемещающихся на локально-однородном фоне. Многие вопросы, связанные с генерированием случайных полей с помощью рекурсивных цифровых фильтров, авторегрессионным представлением случайных полей, методами контроля полученных реализаций полей, находятся в стадии разработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Террайен Ч.У., Куатъери Т.Ф., Даджон Д.Е. Алгоритмы анализа изображений, основанные на статистических моделях. – ТИИЭР, 1986. – Т. 74, № 4, с. 4 – 25.
2. Левшин В.Л. Обработка информации в оптических системах пеленгации. – М.: Машиностроение, 1978. – 168 с.

3. Деньщиков К.К. Имитатор инфракрасных фонов облачного неба для исследования помехозащищенности оптико-электронных САР. – Изв. Вузов СССР. Приборостроение, 1969. – Т. XII, № 10, с. 38 – 42.
4. Любарский В.В., Ярославский Л.П. Линейные алгоритмические модели текстурных изображений. – В сб.: Цифровая оптика. Обработка изображений и полей в экспериментальных исследованиях. М.: Наука, 1990. – С. 134 – 163.
5. Прэтт У.К., Фожра О.Д., Гагалович А. Применение моделей стохастических текстур для обработки изображений. – ТИИЭР, 1981. – Т. 69, № 5, с. 54 – 64.
6. Джайн А. К. Успехи в области математических моделей для обработки изображений. – ТИИЭР, 1981. – Т. 69, № 5, с. 9 – 39.
7. Горьян И.С., Кац Б.М., Цуккерман И.И. Исследование статистики изображений с помощью цифровых вычислительных машин. – Вопросы радиоэлектроники, серия "Техника телевидения", 1971. – Вып. 4, с. 3 – 15.
8. Перетягин Г.И. Представление изображений гауссовыми случайными полями. – Автометрия, 1984. – № 6, с. 42 – 48.
9. Rosenfeld A., Kak A.C. Digital picture processing. – N.Y.: Academic Press, 1976.
10. Дерин Х., Келли П.А. Случайные процессы марковского типа с дискретными аргументами. – ТИИЭР, 1989. Т. 77, № 10, с. 42 – 71.
11. Белокуров А.А., Сечко В.В. Стохастические модели в задачах анализа и обработки изображений. – ЗРЭ, 1989. – № 5, с. 3 – 18.
12. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
13. Астапов Ю.М., Васильев Д.В., Заложнев Ю.И. Теория оптико-электронных следящих систем. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 328 с.
14. Шкурский Б.И. Метод математического моделирования двумерных случайных полей. – Изв. академии наук СССР, Техническая кибернетика, 1969. – № 6, с. 141 – 145.
15. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
16. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений. – М.: Сов. радио, 1979. – 312 с.
17. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. – М.: Мир, 1982. – Т. 1. – 312 с.
18. Глазов Г.Н., Костевич А.Г. Об оптимальном кодировании случайных полей. – В кн.: Интеллектуальные системы в управлении, конструировании и образовании. Томск: Scientific & Technical Translation, 2001. – С. 97 – 105.