

БАНК КОВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ.

1. ЭВРИСТИЧЕСКОЕ ФОРМИРОВАНИЕ

Опубликовано: В кн. «Интеллектуальные системы в управлении, конструировании и образовании». Вып. 3/Под ред. А. А. Шелупанова. – Томск: STT, 2004. Стр. 110-125.

В теории радиоэлектронных систем часто необходимо задавать и использовать модели случайных процессов и случайных полей. При их описании на уровне вторых моментов достаточно задание корреляционной функции и связанного с ним энергетического спектра. Для нормальных процессов и полей такое задание является исчерпывающим. Названные модели необходимы при решении задач (аналитическом или методом численного моделирования) статистического анализа и синтеза оптимальных и субоптимальных систем, кодирования информации, сжатия с предсказанием, анализа фоно-целевой обстановки и многих других. Такая модель относится к смеси сигналов и помех в месте приема или в некоторой точке приемного устройства, и является аппроксимацией результатов анализа распространения радиоволн, или анализа прохождения смеси в части тракта приемника и т. п. Еще чаще имеется лишь информация об отдельных чертах и особенностях случайной совокупности, и задача ее моделирования становится в большой степени неопределенной. Многочисленные публикации из разных областей радиоэлектроники показывают, что в таких случаях исследователи часто берут одну из “популярных”, наиболее простых, “бросающихся в глаза” моделей, например, с экспоненциальной ковариационной функцией (КФ) (в случае поля – с факторизованной экспоненциальной КФ), с гауссовой КФ, с прямоугольным энергетическим спектром (ЭС) и т. п. Подбор более подходящей пары КФ – ЭС, лучше удовлетворяющей имеющейся информации о характеристиках процесса (поля), и в то же время достаточно простой, требует некоторых математических усилий, определенного навыка, и может выходить за рамки компетенции исследователя. Особенно это относится к случаю поля, и тем в большей степени, чем выше его размерность. Поэтому явственно просматривается необходимость создания банка достаточно простых по математической структуре пар КФ – ЭС, в котором для каждой пары дается очерк ее математических свойств, а для некоторых пар указывается ее генезис, могущий подсказать область ее применения. В литературе такие попытки ограничились приведением одних и тех же трех – пятнадцати пар.

1. Определения, предположения, свойства

Хотя в радиоэлектронике и других областях находят применение и векторные и комплексно-значные процессы и поля, ниже имеются в виду скалярные случайные процессы и скалярные случайные поля двух и трех аргументов, т.е. скалярные вещественные случайные функции n аргументов ($n = 1, 2, 3$). Для краткости обозначим такую функцию $\xi(\mathbf{r})$, где \mathbf{r} – n -мерный вектор (при $n = 1$ $\mathbf{r} = t$ – время или $\mathbf{r} = x$ – координата, при $n = 2, 3$ в радиоэлектронике, чаще всего, \mathbf{r} – пространственный вектор). Еще более ограничим класс рассматриваемых функций $\xi(\mathbf{r})$.

1. $\xi(\mathbf{r})$ – статистически однородна, по меньшей мере, в широком смысле, т.е. функция математического ожидания

$$m_{\xi}(\mathbf{r}) = m_{\xi} = const,$$

ковариационная функция (второй двухточечный центральный момент

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \overline{[\xi(\mathbf{r}_1) - m_\xi(\mathbf{r}_1)][\xi(\mathbf{r}_2) - m_\xi(\mathbf{r}_2)]}, \quad K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \sigma^2 R(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

где $\sigma^2 = const$ – дисперсия (конечная или бесконечная, см. ниже), R – функция коэффициента корреляции.

Формирование статистически неоднородной модели, если она необходима на практике, всегда дело следующего этапа, требующего информации о виде и структуре неоднородности.

2. $\xi(\mathbf{r})$ – случайная функция с нулевым средним, т.е. $m_\xi \equiv 0$. Это предположение не ограничивает общности статистически однородной модели, т.к. m_ξ , не равное нулю, вносит тривиальные вклады как в корреляционную функцию:

$$B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \overline{\xi(\mathbf{r}_1)\xi(\mathbf{r}_2)} = K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + m_\xi^2,$$

так и в энергетический спектр:

$$F(\boldsymbol{\omega}) = F_-(\boldsymbol{\omega}) + (2\pi)^n m_\xi^2 \delta(\boldsymbol{\omega}),$$

где $F(\boldsymbol{\omega})$ – полный ЭС, $F_-(\boldsymbol{\omega})$ – ЭС “переменной” составляющей функции $\xi(\mathbf{r})$, $\delta(\boldsymbol{\omega})$ – n -мерная дельта-функция, $\boldsymbol{\omega}$ – n -мерный вектор волновых чисел (при $n = 1$ и $\mathbf{r} = t$ $\boldsymbol{\omega} = \omega$ – круговая частота).

3. ЭС $F(\boldsymbol{\omega})$ – всюду ограничен и непрерывен. Хотя это предположение формально – математически существенно ограничивает класс функций $\xi(\mathbf{r})$, на практике оно или выполняется, как, например, в случае турбулентного поля скоростей [1], или практически означает отсутствие в $\xi(\mathbf{r})$ квазидетерминированных [2] компонент вида

$$\xi_{KD}(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta})$$

(в том числе, возможно, периодических), где S – детерминированная функция \mathbf{r} , $\boldsymbol{\theta}$ – вектор случайных (но независящих от \mathbf{r}) параметров, т.е. $\xi(\mathbf{r})$ – чисто случайная функция [2].

Дальнейшие свойства являются следствием сделанных предположений 1. – 3.

4. Фундаментальное свойство КФ статистически однородной (по крайней мере – в широком смысле) $\xi(\mathbf{r})$ – неотрицательная определенность:

$$\sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^m K(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_s) \lambda_k \lambda_s \geq 0$$

для любых m , $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. В рамках предположения 3. это свойство можно записать в виде

$$\iint K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \geq 0,$$

где $\varphi(\mathbf{r})$ – любая функция, для которой интеграл справа сходится, по крайней мере, в смысле дельта-функций. Из этого свойства, в частности, следует, что $F(\boldsymbol{\omega}) \geq 0$ при всех $\boldsymbol{\omega}$; $|K(\mathbf{r})| \leq K(\mathbf{0})$ при всех \mathbf{r} .

5. $\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} K(\mathbf{r}) = 0$, более того, это стремление к пределу достаточно быстрое, что-

бы обеспечить сходимость интеграла (по всему пространству вектора \mathbf{r})

$$\int |K(\mathbf{r})| d\mathbf{r},$$

в частности, при $n = 1$ $K(x) = o(1/|x|)$.

6. Справедливо представление КФ в виде интеграла Фурье (по всему пространству вектора ω)

$$K(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int F(\omega) e^{i\omega\mathbf{r}} d\omega, \quad (1)$$

и, соответственно,

$$F(\omega) = \int K(\mathbf{r}) e^{-i\omega\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (2)$$

(эту пару преобразований Фурье обычно называют теоремой Винера – Хинчина, причем интегралы в правых частях формально записаны в виде интегралов Римана, в то время как в общем случае (вне предположения 3.) необходима запись в виде интегралов Стильтьеса (теорема Бохнера – Хинчина [3]).

Интеграл в (2) сходится в смысле Римана (в силу свойства 3.), интеграл в (1) сходится или в смысле Римана, или, в крайнем случае, в смысле дельта-функции. В связи с этим, нижеприводимые модели разбиваются на два класса.

А) Случайная функция $\xi(\mathbf{r})$ конечной средней мощности (дисперсии) σ^2 , непрерывная в среднеквадратичном. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $K(\mathbf{r})$ была конечна и непрерывна в точке $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Заметим, что

$$\sigma^2 = K(\mathbf{0}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int F(\omega) d\omega.$$

Б) Случайная функция $\xi(\mathbf{r})$ бесконечной средней мощности (дисперсии) σ^2 . В этом случае КФ включает дельта-видную составляющую в точке $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ и функция $\xi(\mathbf{r})$ не может быть непрерывной в среднеквадратичном.

В свою очередь, класс А) разбивается на два подкласса.

А1) $\xi(\mathbf{r})$ – дифференцируема в среднеквадратичном (необходимое и достаточное условие – существование и непрерывность вторых производных КФ $K(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r} = \mathbf{0}$).

А2) $\xi(\mathbf{r})$ – не дифференцируема в среднеквадратичном.

В нижеследующих примерах пар КФ – ЭС случаи бесконечности дисперсии и недифференцируемости в среднеквадратичном специально отмечаются.

7. В случае А) справедливо равенство Парсевалья, которое в данных условиях можно записать в виде

$$\int K^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int F^2(\omega) d\omega.$$

8. В дальнейшем рассматривается случай, когда при $n = 2, 3$ $\xi(\mathbf{r})$ статистически изотропно, по крайней мере, в широком смысле, т.е.

$$K(\mathbf{r}) = K(|\mathbf{r}|), \quad F(\omega) = F(|\omega|).$$

Тогда, вводя в пространствах векторов \mathbf{r}, ω полярную (при $n = 2$) или сферическую (при $n = 3$) системы координат и выполняя в (1), (2) интегрирование по угловым переменным, получим связь $K(\mathbf{r})$ и $F(\omega)$ в более простой, одномерной форме:

При $n = 2$ (преобразование Ганкеля)

$$K(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty F(\omega) J_0(\omega r) \omega d\omega, \quad (3)$$

$$F(\omega) = 2\pi \int_0^\infty K(r) J_0(\omega r) r dr, \quad (4)$$

где $r = |\mathbf{r}|$, $\omega = |\omega|$, $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка;

при $n = 3$

$$K(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} F(\omega) \frac{\sin(\omega r)}{\omega r} \omega^2 d\omega, \quad (5)$$

$$F(\omega) = 4\pi \int_0^{\infty} K(r) \frac{\sin(\omega r)}{\omega r} r^2 dr. \quad (6)$$

9. В случае статистической изотропности при $n = 2, 3$ равенство Парсеваля также упрощается, принимая простую, одномерную форму:

$$\int_0^{\infty} K^2(r) r^{n-1} dr = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{\infty} F^2(\omega) \omega^{n-1} d\omega.$$

Заметим, что эта форма справедлива и при $n = 1$

2. Способы формирования пар КФ – ЭС

Очень условно формирование пар КФ – ЭС можно разделить на два (пересекающихся) вида:

1. Эвристический (интуитивный) подбор КФ или ЭС, с нахождением второго элемента по (1) или (2), или, в случае статистической изотропии, при $n = 2, 3$ по (3) – (6).

2. Регулярные способы, в свою очередь разделяющиеся на подходы:

- 2.1. Эвристический подбор импульсных характеристик или передаточных функций одномерных, двумерных, трехмерных линейных фильтров, формирующих случайный объект из “белого” объекта, в том числе – каскадных фильтров.
- 2.2. Переход от фильтра нижних частот (ФНЧ) к фильтру верхних частот (ФВЧ) путем вычитания ЭС ФНЧ из ЭС “белого” объекта.
- 2.3. Переход от ФНЧ к полосовому фильтру (ПФ) путем вычитания ЭС ФНЧ₁ из ЭС ФНЧ₂ (более широкого).
- 2.4. Переход от ФНЧ к ПФ путем сдвига (раздвоения) ФНЧ на $\pm\omega_0$.
- 2.5. Переход от ПФ к заграждающему фильтру путем вычитания ЭС ПФ из ЭС неселективного фильтра.
- 2.6. Другие, более сложные преобразования ФНЧ [4].
- 2.7. Использование в генезисе КФ (ЭС) свертки (произведения) или произведения (свертки) ранее полученных элементов.
- 2.8. Использование непрерывных вейвлетов в качестве импульсных характеристик формирующих фильтров.
- 2.9. Использование в генезисе ЭС популярных “окон” из спектрального анализа.
- 2.10. Получение из одних ЭС других, путем умножения на полином четной степени с положительными коэффициентами.
- 2.11. Формирование ЭС путем дополнения до четности известных в теории вероятностей и математической статистике многочисленных плотностей вероятностей.
- 2.12. Формирование двумерных (трехмерных) КФ и ЭС с круговой (сферической) или эллиптической (эллипсоидальной) симметрией из одномерных КФ и ЭС.
- 2.13. Формирование факторизованных двумерных и трехмерных КФ и ЭС из одномерных элементов.

3. Примеры одномерных ($n = 1$) КФ – ЭС, подобранных эвристическим способом

$$\text{Определим функцию } P(r) = \begin{cases} 1, & |r| \leq 1, \\ 0, & |r| > 1. \end{cases}$$

3.1. Финитный равномерный ЭС (рис. 1, а)

$$F(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = \frac{\sin(\omega_0 r)}{\omega_0 r}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0}{\pi}.$$

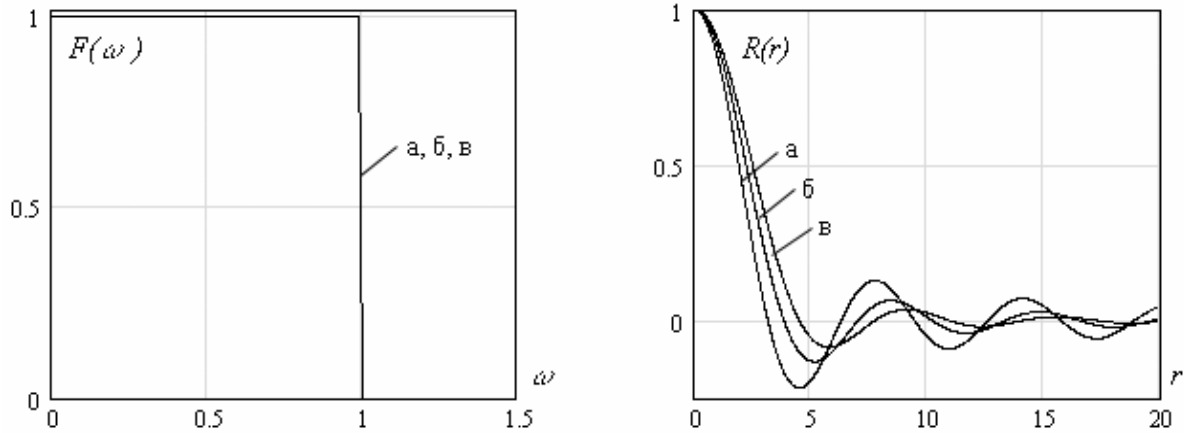


Рис. 1. Финитный равномерный ЭС, $\omega_0 = 1$

3.2. Треугольный ЭС (рис. 2, а)

$$F(\omega) = \left(1 - \frac{|\omega|}{\omega_0}\right) \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega_e r}{2}\right)}{\frac{\omega_e r}{2}}\right]^2, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_e}{2\pi}.$$

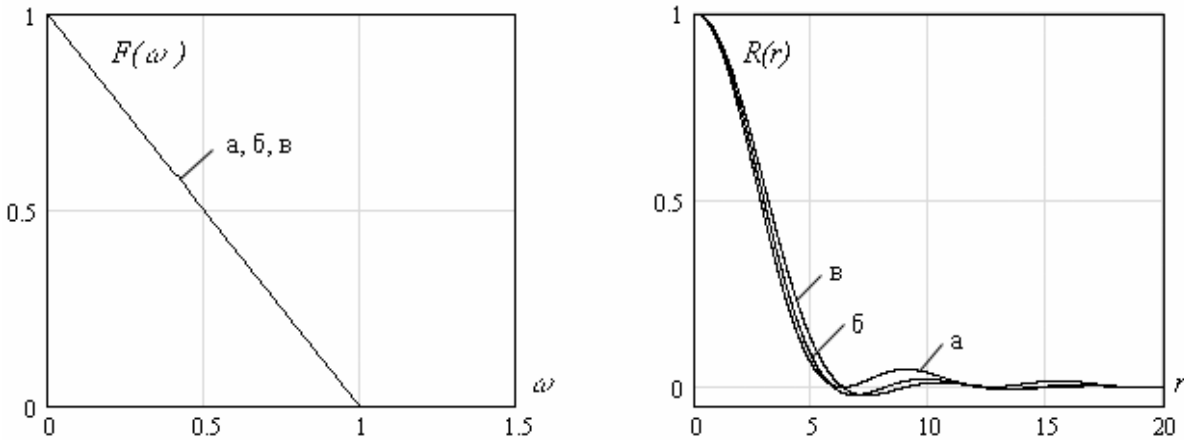


Рис. 2. Треугольный ЭС, $\omega_0 = 1$

3.3. Финитный параболический ЭС (рис. 3, а)

$$F(\omega) = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = 3 \frac{\sin(\omega_0 r) - \omega_0 r \cos(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^3}, \quad \sigma^2 = \frac{2\omega_0}{3\pi}.$$

3.4. Финитный косинусоидальный ЭС (рис. 4, а)

$$F(\omega) = \cos\left(\frac{\pi \omega}{2\omega_0}\right) \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = \frac{\cos(\omega_0 r)}{1 - \left(\frac{2\omega_0 r}{\pi}\right)^2}, \quad \sigma^2 = \frac{2\omega_0}{\pi^2}.$$

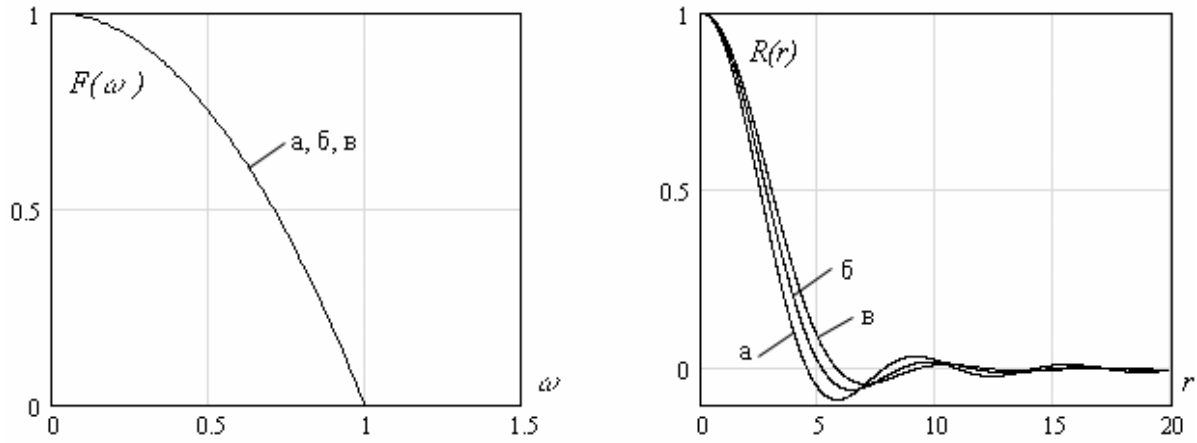


Рис. 3. Финитный параболический ЭС, $\omega_0 = 1$

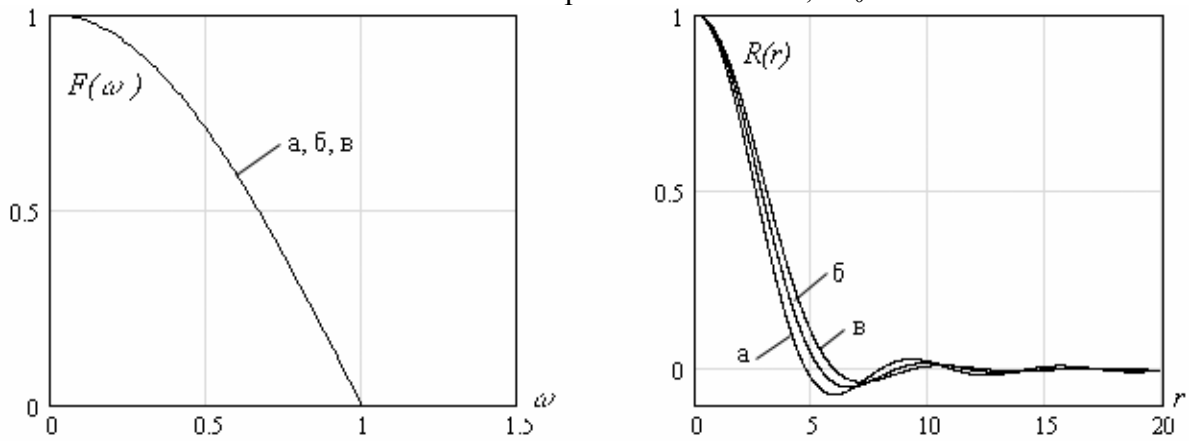


Рис. 4. Финитный косинусоидальный ЭС, $\omega_0 = 1$

3.5. Финитный квадратно-косинусоидальный ЭС (рис. 5, а)

$$F(\omega) = \cos^2\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_0}\right) \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = \frac{\sin(\omega_0 r)}{\omega_0 r \left[1 - \left(\frac{\omega_0 r}{\pi}\right)^2\right]}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

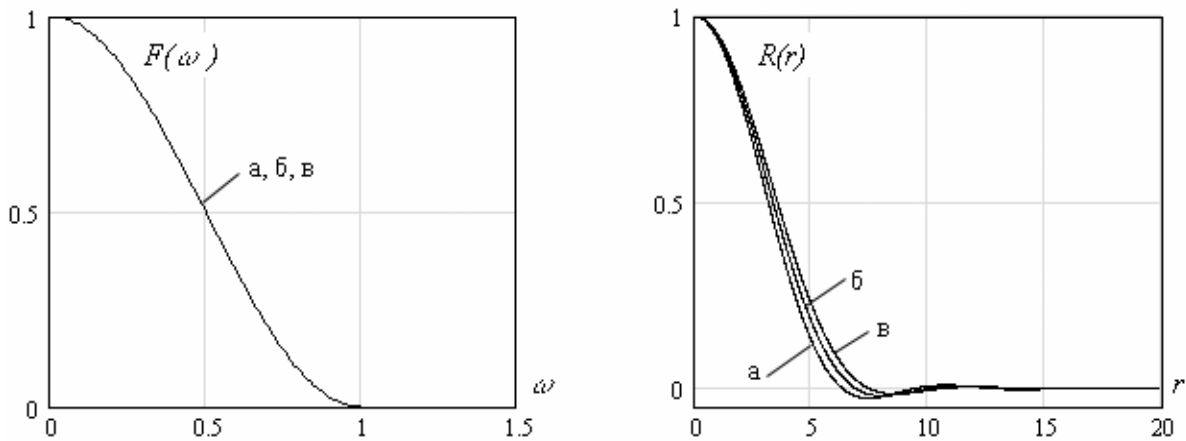


Рис. 5. Финитный квадратно-косинусоидальный ЭС, $\omega_0 = 1$

3.6. Экспоненциальный ЭС (рис. 6, а)

$$F(\omega) = \exp\left(-\frac{|\omega|}{\omega_0}\right), \quad R(r) = \frac{1}{1 + (\omega_0 r)^2}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0}{\pi}.$$

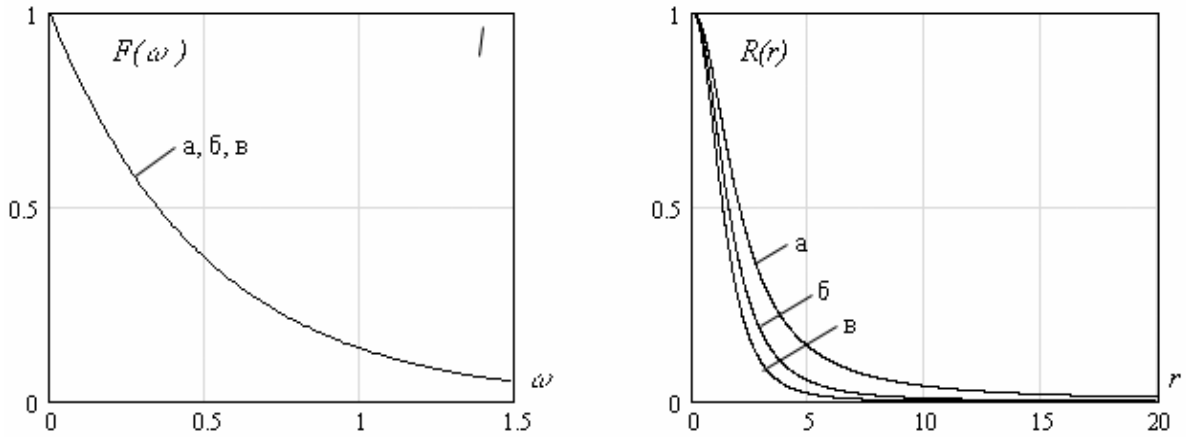


Рис. 6. Экспоненциальный ЭС, $\omega_0 = 0,5$

3.7. Гауссоидальный ЭС (рис. 7, а)

$$F(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right), \quad R(r) = \exp\left(-\frac{\omega_0^2 r^2}{4}\right), \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0}{2\sqrt{\pi}}.$$

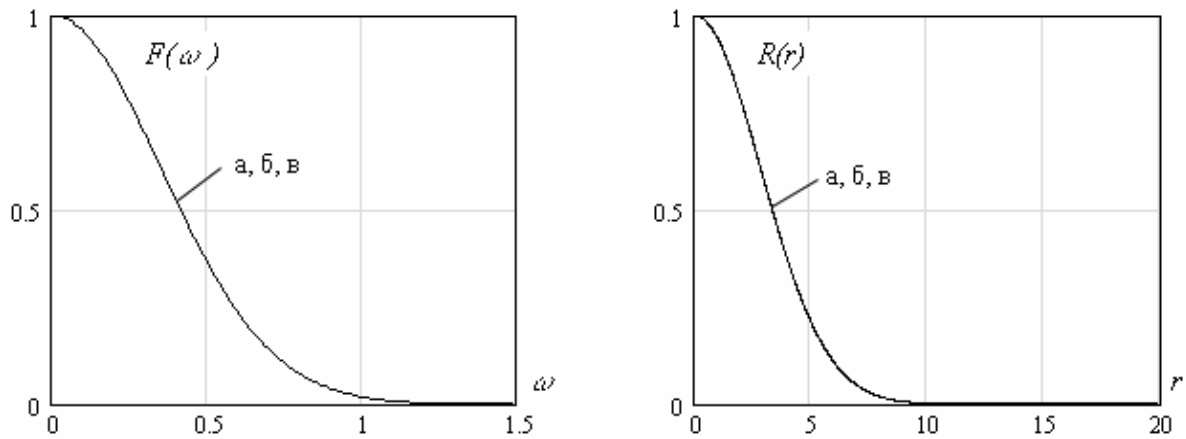


Рис. 7. Гауссоидальный ЭС, $\omega_0 = 0,5$

3.8. Треугольная КФ (рис. 8, а)

$$R(r) = \left(1 - \frac{|r|}{r_0}\right) \Pi\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad \sigma^2 = \frac{1}{r_0}, \quad F(\omega) = \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega r_0}{2}\right)}{\frac{\omega r_0}{2}}\right]^2.$$

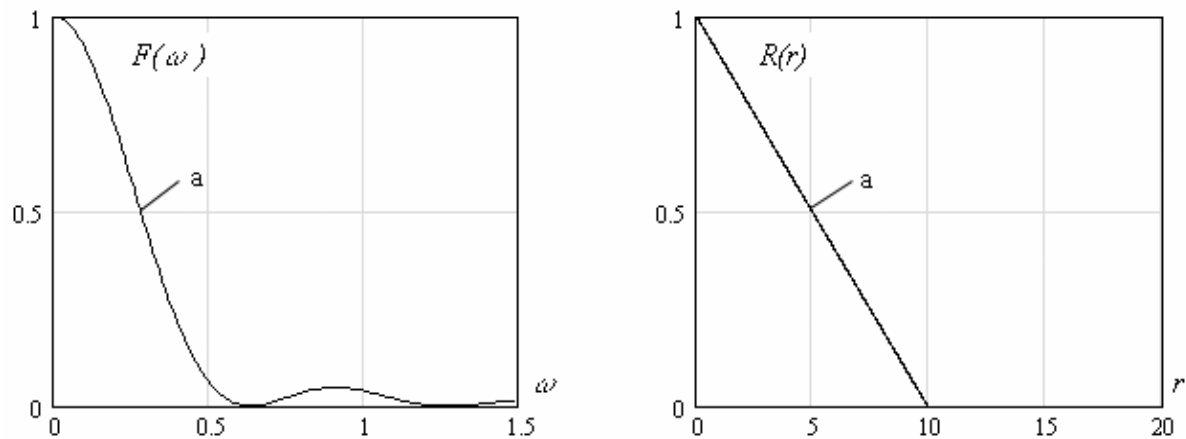


Рис. 8. Треугольная КФ, $r_0 = 10$

Процесс не дифференцируем в среднеквадратичном.

3.9. Экспоненциальная КФ (рис. 9, а)

$$R(r) = \exp\left(-\frac{|r|}{r_0}\right), \quad \sigma^2 = \frac{1}{2r_0} \quad F(\omega) = \frac{1}{1+(\omega r_0)^2}.$$

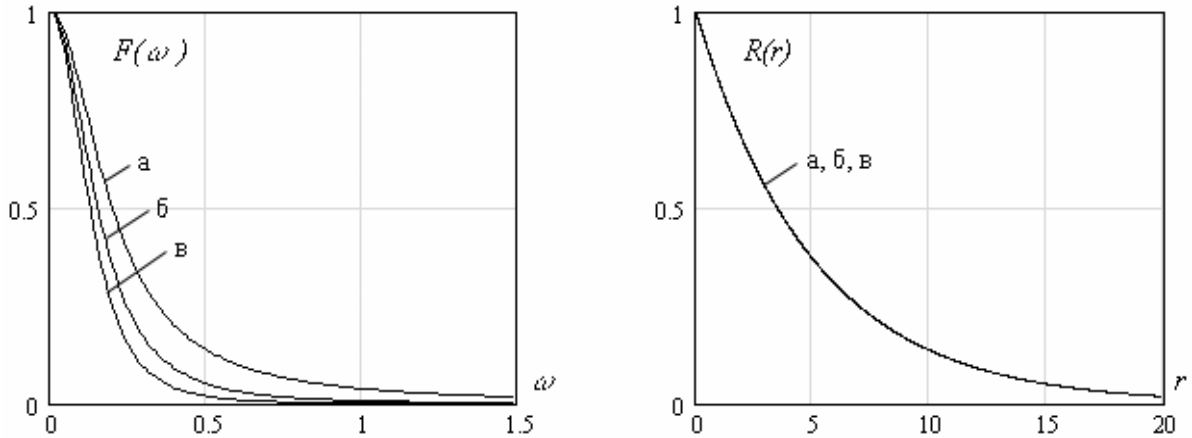


Рис. 9. Экспоненциальная КФ, $r_0 = 5$

Процесс не дифференцируем в среднеквадратичном.

3.10. Гауссоидальная КФ – то же, что 3.7, с точностью до нормировки, $\sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} r_0}$.

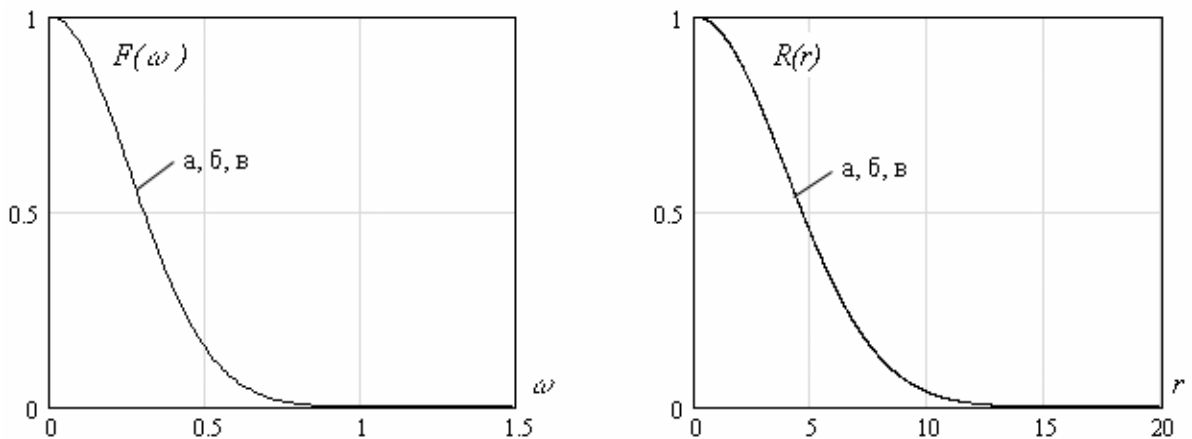


Рис. 10. Гауссоидальная КФ, $r_0 = 5,5$

3.11. Белый шум

$$F(\omega) = N_o = \text{const}, \quad -\infty < \omega < \infty, \quad K(r) = N_o \delta(r).$$

Процесс с бесконечной средней мощностью (σ^2).

4. Примеры двумерных ($n = 2$) КФ – ЭС, подобранных эвристическим способом, для статистически изотропных полей

$$\text{Определим функцию } \text{circ}(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

4.1. Финитный равномерный ЭС (рис. 1, б)

$$F(\omega) = \text{circ}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = \frac{2J_1(\omega_0 r)}{\omega_0 r}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0^2}{4\pi}.$$

4.2. Треугольный ЭС (рис. 2, б)

$$F(\omega) = \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \text{circ}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

$$R(r) = 3\pi \frac{J_1(\omega_0 r)H_0(\omega_0 r) - J_0(\omega_0 r)H_1(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^2}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0^2}{12\pi},$$

где $H_0(\cdot)$, $H_1(\cdot)$ – функции Струве.

4.3. Финитный параболический ЭС (рис. 3, б)

$$F(\omega) = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] \text{circ}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = 8 \frac{J_2(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^2}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0^2}{8\pi}.$$

4.4. Финитный косинусоидальный ЭС (рис. 4, б)

$$F(\omega) = \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_0}\right) \text{circ}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

$$R(r) = \frac{\pi^2}{2(\pi-2)\omega_0^2} \int_0^{\omega_0} \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_0}\right) J_0(\omega r) \omega \, d\omega, \quad \sigma^2 = \frac{\pi-2}{\pi^3} \omega_0^2.$$

4.5. Финитный квадратно-косинусоидальный ЭС (рис. 5, б)

$$F(\omega) = \cos^2\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_0}\right) \text{circ}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

$$R(r) = \frac{4\pi^2}{(\pi^2-4)\omega_0^2} \int_0^{\omega_0} \cos^2\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_0}\right) J_0(\omega r) \omega \, d\omega, \quad \sigma^2 = \frac{\pi^2-4}{8\pi^3} \omega_0^2.$$

4.6. Экспоненциальный ЭС (рис. 6, б)

$$F(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = \frac{1}{\left[1 + (\omega_0 r)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0^2}{2\pi}.$$

4.7. Гауссоидальный ЭС (рис. 7, б)

$$F(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right), \quad R(r) = \exp\left(-\frac{\omega_0^2 r^2}{4}\right), \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0^2}{4\pi}.$$

4.8. Экспоненциальная КФ (рис. 8, б)

$$R(r) = \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right), \quad \sigma^2 = \frac{1}{2\pi r_0^2}, \quad F(\omega) = \frac{1}{\left[1 + (\omega r_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Поле не дифференцируемо в среднеквадратичном.

4.9. Гауссоидальная КФ – то же, что 4.7, с точностью до нормировки, $\sigma^2 = \frac{1}{\pi r_0^2}$.

4.10. Белое поле ($n = 2$)

$$F(\omega) = A = \text{const}, \quad 0 \leq \omega < \infty, \quad K(\mathbf{r}) = A \delta(\mathbf{r}) = \frac{2A}{\pi} \delta(r^2).$$

Поле с бесконечной средней мощностью (σ^2).

5. Примеры трехмерных ($n = 3$) КФ – ЭС, подобранных эвристическим способом, для статистически изотропных полей

Определим функцию $\text{sphere}(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$

5.1. Финитный равномерный ЭС (рис. 1, в)

$$F(\omega) = \text{sphere}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = 3 \frac{\sin(\omega_0 r) - \omega_0 r \cos(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^3}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0^3}{6\pi^2}.$$

5.2. Треугольный ЭС (рис. 2, в)

$$F(\omega) = \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \text{sphere}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = 12 \frac{2[1 - \cos(\omega_0 r)] - \omega_0 r \sin(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^4},$$

$$\sigma^2 = \frac{\omega_0^3}{24\pi^2}.$$

5.3. Финитный параболический ЭС (рис. 3, в)

$$F(\omega) = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] \text{sphere}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

$$R(r) = 15 \frac{[3 - (\omega_0 r)^2] \sin(\omega_0 r) - 3\omega_0 r \cos(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^5}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0^3}{15\pi^2}.$$

5.4. Финитный косинусоидальный ЭС (рис. 4, в)

$$F(\omega) = \cos\left(\frac{\pi \omega}{2\omega_0}\right) \text{sphere}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

$$R(r) = \frac{\pi^4}{\pi^2 - 8} \frac{[\pi^2 - (2\omega_0 r)^2] \sin(\omega_0 r) - 8\omega_0 r \cos(\omega_0 r)}{\omega_0 r [\pi^2 - (2\omega_0 r)^2]^2}, \quad \sigma^2 = \frac{\pi^2 - 8}{\pi^5} \omega_0^3.$$

5.5. Финитный квадратно-косинусоидальный ЭС (рис. 5, в)

$$F(\omega) = \cos^2\left(\frac{\pi \omega}{2\omega_0}\right) \text{sphere}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad \sigma^2 = \frac{\pi^2 - 6}{12\pi^4} \omega_0^3$$

$$R(r) = \frac{3\pi^4}{\pi^2 - 6} \left\{ \frac{[\pi^2 - 3(\omega_0 r)^2] \sin(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^3 [\pi^2 - (\omega_0 r)^2]^2} - \frac{[\pi^2 - (\omega_0 r)^2] \cos(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^2 [\pi^2 - (\omega_0 r)^2]^2} \right\}.$$

5.6. Экспоненциальный ЭС (рис. 6, в)

$$F(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = \frac{1}{[1 + (\omega_0 r)^2]^2}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0^3}{\pi^2}.$$

5.7. Гауссоидальный ЭС (рис. 7, в)

$$F(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right), \quad R(r) = \exp\left(-\frac{\omega_0^2 r^2}{4}\right), \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0^3}{8\sqrt{\pi^3}}.$$

5.8. Экспоненциальная КФ (рис. 9, в)

$$R(r) = \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right), \quad \sigma^2 = \frac{1}{8\pi r_0^3}, \quad F(\omega) = \frac{1}{[1 + (\omega r_0)^2]^2}.$$

Поле не дифференцируемо в среднеквадратичном.

5.9. Гауссоидальная КФ – то же, что 5.7, с точностью до нормировки,

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi^3 r_0^3}}.$$

5.10. Белое поле ($n = 3$)

$$F(\omega) = B = \text{const}, \quad 0 \leq \omega < \infty, \quad K(\mathbf{r}) = B \delta(\mathbf{r}) = \frac{3B}{2\pi} \delta(r^3).$$

Поле с бесконечной средней мощностью (σ^2).

Таким образом, составлен обширный банк модельных корреляционных функций и энергетических спектров для действительных, скалярных случайных процессов и полей, изложены принципы формирования банка и, в данной статье, приведены примеры пар ЭС – КФ, подобранных эвристическим способом. Примеры пар, подобранных регулярными способами, приведены в последующих статьях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-лит., 1967. – Часть II, 720 с.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Изд. 2-е, пераб. и доп. – М.: Сов. радио, 1974. – Кн. 1, 552 с.
3. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / Под ред. В.С. Королюка. – К.: Наукова думка, 1978. – 584 с.
4. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 848 с.