

**БАНК КОВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ.
2. РЕГУЛЯРНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ**

Опубликовано: В кн. «Интеллектуальные системы в управлении, конструировании и образовании». Вып. 4/Под ред. А. А. Шелупанова. – Томск: Изд-во Института оптики атмосферы СО РАН, 2005. Стр. 106-121.

В предыдущей статье [1] была обоснована необходимость составления банка ковариационных функций (КФ) и энергетических спектров (ЭС) случайных процессов и полей, сделаны основные определения и ограничения, выяснены свойства КФ и ЭС, перечислены предложенные авторами регулярные способы формирования пар КФ – ЭС, приведены примеры пар, полученных эвристическим подбором. В данной статье приведены примеры регулярного формирования пар КФ – ЭС для случайного процесса.

1. Эвристический подбор импульсных характеристик или передаточных функций линейных стационарных фильтров, формирующих случайный процесс из белого шума

Связь характеристик формирующего фильтра и генерируемой пары КФ – ЭС неоднозначна. Это обусловлено “неучастием” фазочастотной характеристики в определении энергетического спектра случайного процесса и одной и той же паре КФ – ЭС соответствует бесконечное множество формирующих фильтров, отличающихся фазовыми характеристиками.

Т.е. $F(\omega) = |\dot{H}(\omega)|^2$, $K(r) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z)h(z-r)dz$, где $\dot{H}(\omega)$ – комплексная частотная характеристика, $h(r)$ – импульсная характеристика.

Предполагается, что формирующий фильтр устойчивый стационарный линейный.

1.1. Импульсная характеристика (ИХ) в виде треугольного окна Бартлетта (рис. 1) (случай ИХ в виде прямоугольного окна Дирихле рассмотрен в [1])

$$R(r) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + 6\left|\frac{r}{r_0}\right|^3, & 0 \leq |r| \leq \frac{r_0}{2}, \\ 2\left(1 - \left|\frac{r}{r_0}\right|\right)^3, & \frac{r_0}{2} \leq |r| \leq r_0, \\ 0, & |r| > r_0, \end{cases} \quad F(\omega) = \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega r_0}{4}\right)}{\frac{\omega r_0}{4}} \right]^4, \quad \sigma^2 = \frac{4}{3r_0}.$$

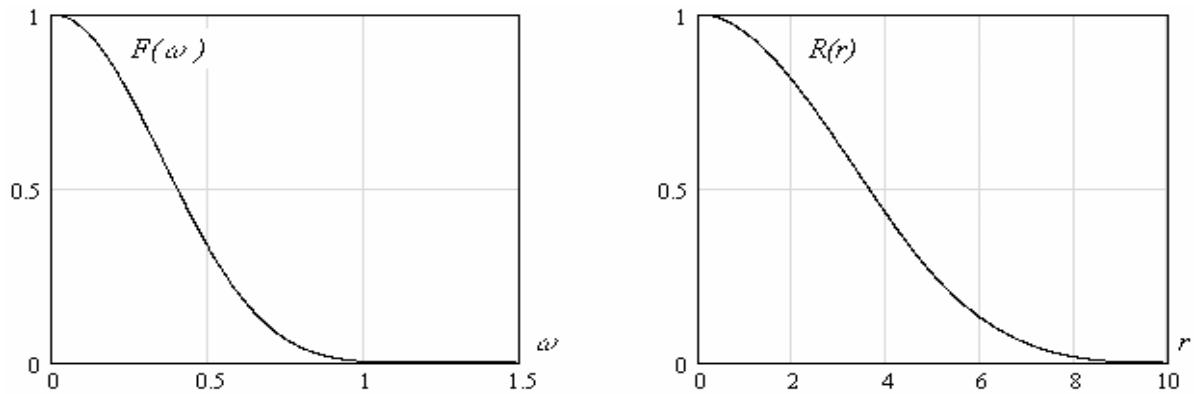


Рис. 1. Импульсная характеристика в виде окна Бартлетта, $r_0 = 10$

1.2. Прямоугольная ИХ (она же вейвлет Хаара) (рис. 2, а)

$$h(r) = \begin{cases} -1, & -r_0 \leq r < 0, \\ 1, & 0 < r \leq r_0, \\ 0 & r = 0, \end{cases} \quad F(\omega) = 1,90454 \frac{\sin^4\left(\frac{\omega r_0}{2}\right)}{\left(\frac{\omega r_0}{2}\right)^2},$$

$$R(r) = \begin{cases} 1 - \frac{3|r|}{2r_0}, & 0 \leq |r| \leq r_0, \\ -1 + \frac{|r|}{2r_0}, & r_0 \leq |r| \leq 2r_0, \\ 0, & |r| > 2r_0, \end{cases} \quad \sigma^2 = \frac{0,95227}{r_0}.$$

1.3. Пилообразная ИХ (она же вейвлет) (рис. 2, б)

$$h(r) = \begin{cases} \frac{r}{r_0}, & 0 \leq |r| \leq r_0, \\ 0, & |r| > r_0, \end{cases} \quad R(r) = \begin{cases} 1 - \frac{3|r|}{2r_0} + \frac{|r|^3}{4r_0^3}, & 0 \leq |r| \leq 2r_0, \\ 0, & |r| > 2r_0, \end{cases}$$

$$F(\omega) = 5,25612 \frac{[\omega r_0 \cos(\omega r_0) - \sin(\omega r_0)]^2}{(\omega r_0)^4}, \quad \sigma^2 = \frac{0,87602}{r_0}.$$

1.4. Треугольная ИХ (она же вейвлет) (рис. 2, в)

$$h(r) = \begin{cases} \frac{2r}{r_0}, & 0 \leq |r| \leq 0,5r_0, \\ 2\left(1 - \frac{|r|}{r_0}\right)\text{sign}(r), & 0,5r_0 \leq |r| \leq r_0, \\ 0, & |r| > r_0, \end{cases}$$

$$R(r) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + 5 \left| \frac{r}{r_0} \right|^3, & 0 \leq |r| \leq 0,5 r_0, \\ 1,5 - 3 \left| \frac{r}{r_0} \right| + \left| \frac{r}{r_0} \right|^3, & 0,5 r_0 \leq |r| \leq r_0, \\ 5,5 - 15 \left| \frac{r}{r_0} \right| + 12 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 3 \left| \frac{r}{r_0} \right|^3, & r_0 \leq |r| \leq 1,5 r_0, \\ -8 + 12 \left| \frac{r}{r_0} \right| - 6 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + \left| \frac{r}{r_0} \right|^3, & 1,5 r_0 \leq |r| \leq 2 r_0, \\ 0, & |r| > 2 r_0, \end{cases}$$

$$F(\omega) = 22,87843 \frac{\left[\sin(\omega r_0) - 2 \sin\left(\frac{\omega r_0}{2}\right) \right]^2}{(\omega r_0)^4}, \quad \sigma^2 = \frac{0,95327}{r_0}.$$

1.5. Производно-гауссовская ИХ (она же вейвлет) (рис. 2, г)

$$h(r) = \sqrt{2e} \beta r \exp(-\beta^2 r^2), \quad \sigma^2 = \frac{\beta e}{\sqrt{8\pi}},$$

$$R(r) = (1 - \beta^2 r^2) \exp\left(-\frac{\beta^2 r^2}{2}\right), \quad F(\omega) = \frac{e}{2} \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\beta^2}\right).$$

1.6. Колебательный контур (вариант 1) (рис. 3, а)

$$H(p) = \frac{2\alpha p}{(p+\alpha)^2 + \omega_c^2}, \quad h(r) = 2\alpha \exp(-\alpha r) \left[\cos(\omega_c r) - \frac{\alpha}{\omega_c} \sin(\omega_c r) \right], \quad r \geq 0,$$

$$R(r) = \begin{cases} \exp(-\alpha |r|) \left[\cos(\omega_c r) - \frac{\alpha}{\omega_c} \sin(\omega_c |r|) \right], & Q \neq 0,5, \\ \exp(-\alpha |r|) (1 - \alpha |r|), & Q = 0,5, \end{cases} \quad -\infty < r < \infty,$$

$$F(\omega) = \frac{4\alpha^2 \omega^2}{\left[\alpha^2 + (\omega + \omega_c)^2 \right] \left[\alpha^2 + (\omega - \omega_c)^2 \right]}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0}{2Q}.$$

где $\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}$, $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, ω_0 – резонансная частота, Q – добротность.

1.7. Колебательный контур (вариант 2) (рис. 3, б)

$$H(p) = \frac{\omega_0^2}{(p+\alpha)^2 + \omega_c^2}, \quad h(r) = \frac{\omega_0^2}{\omega_c} \exp(-\alpha r) \sin(\omega_c r), \quad r \geq 0,$$

$$R(r) = \begin{cases} \exp(-\alpha |r|) \left[\cos(\omega_c r) + \frac{\alpha}{\omega_c} \sin(\omega_c |r|) \right], & Q \neq 0,5, \\ \exp(-\alpha |r|) (1 + \alpha |r|), & Q = 0,5, \end{cases} \quad -\infty < r < \infty,$$

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega_0^4}{[\alpha^2 + (\omega + \omega_c)^2][\alpha^2 + (\omega - \omega_c)^2]}, & Q \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{4\alpha^2 \omega_c^2}{[\alpha^2 + (\omega + \omega_c)^2][\alpha^2 + (\omega - \omega_c)^2]}, & Q > \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \begin{cases} \frac{Q\omega_0}{2}, & Q \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right), & Q > \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

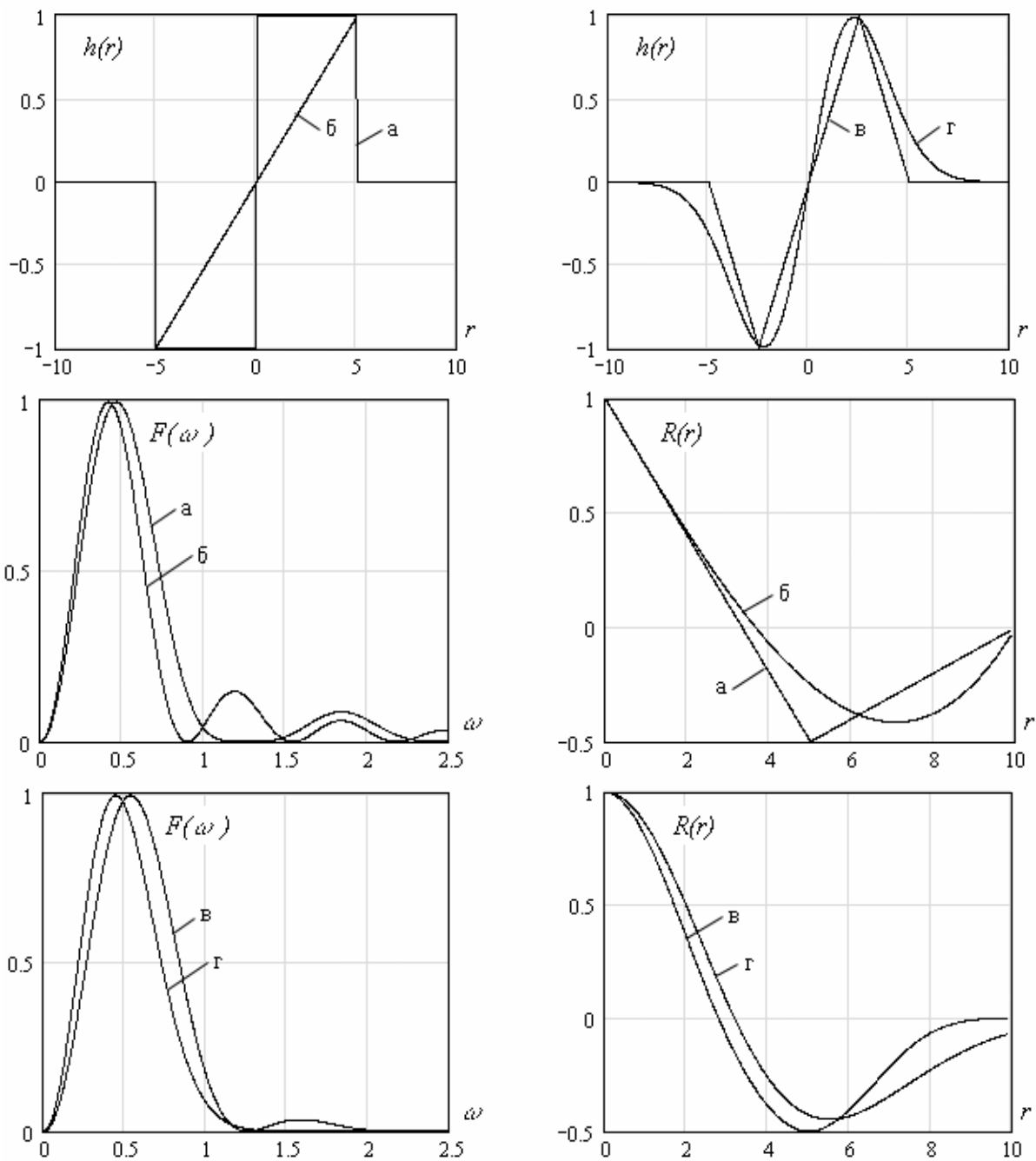


Рис. 2. Импульсные характеристики в виде измерительных функций временного

дискриминатора, $r_0 = 5$, $\beta = \pi / 10$

1.8. Колебательный контур (вариант 3) (рис. 3, в)

$$H(p) = \frac{\omega_0^2 + \omega_0 p}{(p + \alpha)^2 + \omega_c^2}, \quad h(r) = \omega_0 \exp(-\alpha r) \left[\cos(\omega_c r) + \frac{\omega_0 - \alpha}{\omega_c} \sin(\omega_c r) \right], \quad r \geq 0,$$

$$F(\omega) = \frac{k_0 \omega_0^2 (\omega_0^2 + \omega^2)}{[\alpha^2 + (\omega + \omega_c)^2][\alpha^2 + (\omega - \omega_c)^2]}, \quad k_0 = \begin{cases} 1, & Q \leq \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \frac{1 - 4Q^2 + 2Q\sqrt{4Q^2 - 1}}{Q^2}, & Q > \frac{\sqrt{3}}{3}, \end{cases}$$

$$R(r) = \exp(-\alpha |r|) \cos(\omega_c r), \quad \sigma^2 = k_0 Q \omega_0.$$

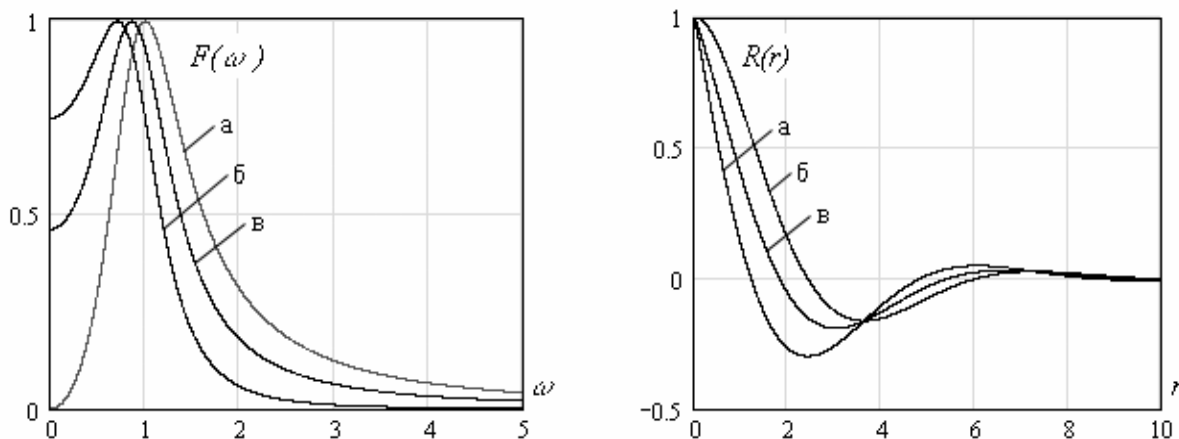


Рис. 3. Колебательные контуры, $\omega_0 = 1$, $Q = 1$

1.9. Связанные колебательные контуры (рис. 4)

$$S(\xi) = \frac{4A^2}{\xi^4 + 2(1 - A^2)\xi^2 + (1 + A^2)^2}, \quad F(\omega) = S\left(2Q \frac{\omega + \omega_0}{\omega_0}\right) + S\left(2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right),$$

$$R(r) = \left[\frac{\sin\left(\frac{A\omega_0}{2Q}|r|\right)}{A} + \cos\left(\frac{A\omega_0}{2Q}r\right) \right] \exp\left(\frac{\omega_0}{2Q}|r|\right) \cos(\omega_0 r), \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0}{Q} \frac{A^2}{1 + A^2}.$$

1.10. N – звенная сглаживающая RC-цепь (рис. 5)

$$F(\omega) = \frac{\alpha^{2N}}{(\alpha^2 + \omega^2)^N}, \quad R(r) = \frac{2(\alpha|r|/2)^{N-1/2}}{\Gamma(N-1/2)} K_{N-1/2}(\alpha|r|), \quad \sigma^2 = \frac{\alpha \Gamma(N-1/2)}{2\sqrt{\pi} \Gamma(N)}.$$

Здесь $K_\nu(x)$ - функция Макдональда; $\Gamma(x)$ - гамма-функция; N – число звеньев RC-цепи (в общем случае N – нецелое, $N \in (1/2, \infty)$).

При целом N выражение для функции коэффициента корреляции упрощается

$$R(r) = \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-1)! (2N-2-k)! 2^k}{(2N-2)! (N-1-k)! k!} (\alpha|r|)^k \right] \exp(-\alpha|r|).$$

При $N=1$ $R(r) = \exp(-\alpha|r|)$,

$$N=2 \quad R(r) = (1 + \alpha|r|)\exp(-\alpha|r|),$$

$$N=3 \quad R(r) = \left(1 + \alpha|r| + \frac{1}{3}\alpha^2 r^2\right)\exp(-\alpha|r|),$$

$$N=4 \quad R(r) = \left(1 + \alpha|r| + \frac{2}{5}\alpha^2 r^2 + \frac{1}{15}\alpha^3 |r|^3\right)\exp(-\alpha|r|),$$

$$N=5 \quad R(r) = \left(1 + \alpha|r| + \frac{3}{7}\alpha^2 r^2 + \frac{2}{21}\alpha^3 |r|^3 + \frac{1}{105}\alpha^4 r^4\right)\exp(-\alpha|r|),$$

$$N=6 \quad R(r) = \left(1 + \alpha|r| + \frac{4}{9}\alpha^2 r^2 + \frac{1}{9}\alpha^3 |r|^3 + \frac{1}{63}\alpha^4 r^4 + \frac{1}{945}\alpha^5 |r|^5\right)\exp(-\alpha|r|).$$

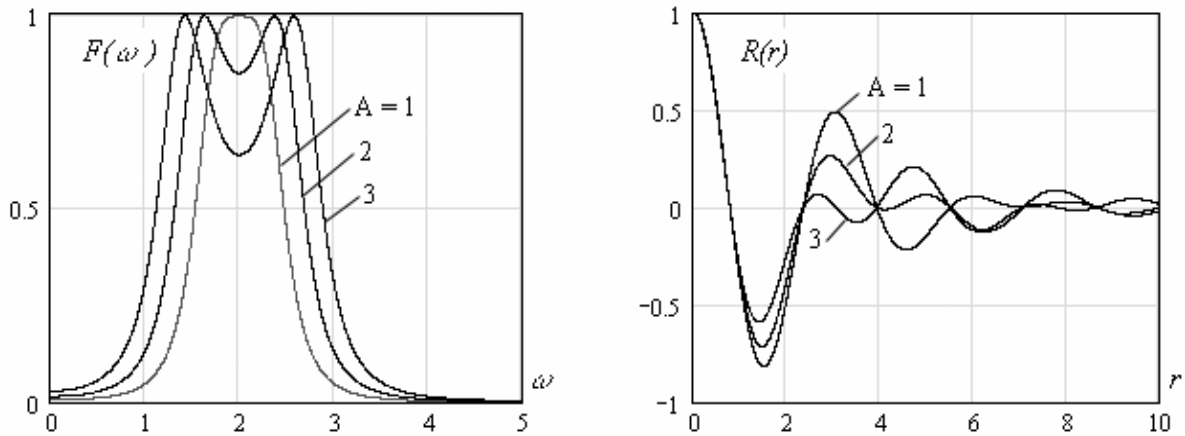


Рис. 4. Связанные колебательные контуры, $\omega_0 = 2$, $Q = 3$

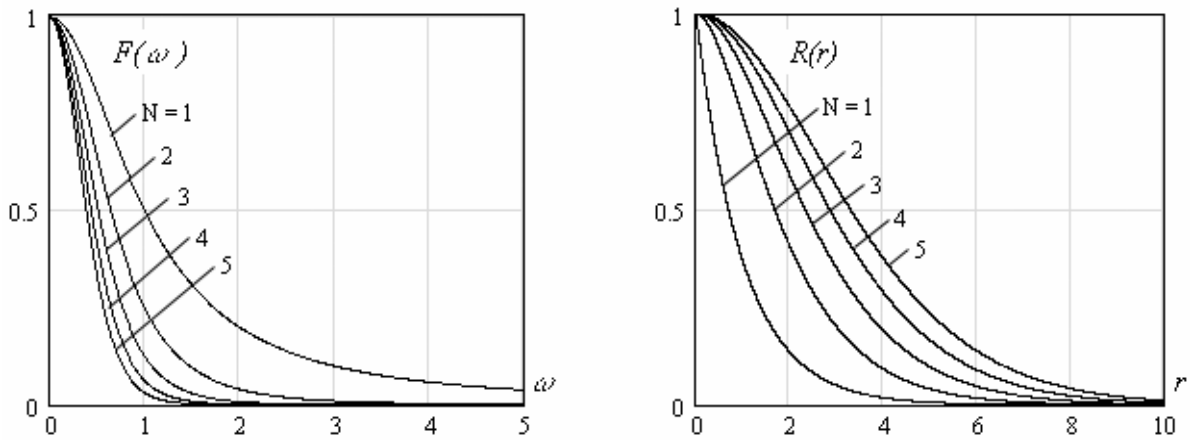


Рис. 5. N -каскадный НЧ-усилитель, $\alpha = 1$

2. Использование непрерывных вейвлетов в качестве импульсных характеристик формирующих фильтров

2.1. Вейвлет “Мексиканская шляпа” (рис. 6, а)

$$h(r) = (1 - \beta^2 r^2) \exp\left(-\frac{\beta^2 r^2}{2}\right), \quad \sigma^2 = \frac{3\beta e^2}{32\sqrt{\pi}},$$

$$R(r) = \left(1 - \beta^2 r^2 + \frac{\beta^4 r^4}{12}\right) \exp\left(-\frac{\beta^2 r^2}{4}\right), \quad F(\omega) = \frac{e^2}{4} \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^4 \exp\left(-\frac{\omega^2}{\beta^2}\right).$$

2.2. Вейвлет “Французская шляпа” (рис. 6, б)

$$h(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |r| \leq \frac{r_0}{3}, \\ -0,5, & \frac{r_0}{3} \leq |r| \leq r_0, \\ 0, & |r| > r_0, \end{cases} \quad R(r) = \begin{cases} 1 - 2,5 \left| \frac{r}{r_0} \right|, & 0 \leq |r| \leq \frac{2r_0}{3}, \\ -1,5 + 1,25 \left| \frac{r}{r_0} \right|, & \frac{2r_0}{3} \leq |r| \leq \frac{4r_0}{3}, \\ 0,5 - 0,25 \left| \frac{r}{r_0} \right|, & \frac{4r_0}{3} \leq |r| \leq 2r_0, \\ 0, & |r| > 2r_0, \end{cases}$$

$$F(\omega) = 1,18597 \frac{\left[3 \sin\left(\frac{\omega r_0}{3}\right) - \sin(\omega r_0) \right]^2}{(\omega r_0)^2}, \quad \sigma^2 = \frac{1,18597}{r_0}.$$

3. Использование в генезисе ЭС временных “окон”

В настоящее время известно более пятидесяти окон, некоторые из них настраиваемые. Функции, описывающие временные окна, положительны и четны. Поэтому они идеально подходят для описания энергетических спектров и, соответственно, генерирования значительного количества семейств пар. Простейшие окна, прямоугольное, треугольное и параболическое (окна Дирихле, Бартлетта, Рисса), были использованы в эвристическом способе [1].

3.1. Окно Парзена (свертка треугольников) (рис. 7, а)

$$F(\omega) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 + 6 \left| \frac{\omega}{\omega_g} \right|^3, & 0 \leq |\omega| \leq \frac{\omega_g}{2}, \\ 2 \left(1 - \left| \frac{\omega}{\omega_g} \right| \right)^3, & \frac{\omega_g}{2} \leq |\omega| \leq \omega_g, \\ 0, & |\omega| > \omega_g, \end{cases} \quad R(r) = \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega_g r}{4}\right)}{\frac{\omega_g r}{4}} \right]^4, \quad \sigma^2 = \frac{3\omega_g}{8\pi}.$$

3.2. Окно Ханна (рис. 7, б)

$$F(\omega) = 0,5 \left[1 + \cos\left(\pi \frac{\omega}{\omega_g}\right) \right] \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right), \quad \sigma^2 = \frac{\omega_g}{2\pi},$$

$$R(r) = \text{sinc}(\omega_g r) + 0,5 \left[\text{sinc}(\omega_g r + \pi) + \text{sinc}(\omega_g r - \pi) \right],$$

$$\text{где } \Pi(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 1, \\ 0, & |\omega| > 1, \end{cases} \quad \text{sinc}(r) = \frac{\sin(r)}{r}.$$

3.3. Окно Хэмминга (рис. 7, в)

$$F(\omega) = \left[0,54 + 0,46 \cos\left(\pi \frac{\omega}{\omega_g}\right) \right] \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right),$$

$$R(r) = \text{sinc}(\omega_g r) + 0,42593 \left[\text{sinc}(\omega_g r + \pi) + \text{sinc}(\omega_g r - \pi) \right], \quad \sigma^2 = 0,54 \frac{\omega_g}{\pi}.$$

3.4. Окно Блэкмана (рис. 8, а)

$$F(\omega) = \left[0,42 + 0,5 \cos\left(\pi \frac{\omega}{\omega_0}\right) + 0,08 \cos\left(2\pi \frac{\omega}{\omega_0}\right) \right] \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad \sigma^2 = 0,42 \frac{\omega_0}{\pi},$$

$$R(r) = \text{sinc}(\omega_0 r) + 0,59524 [\text{sinc}(\omega_0 r + \pi) + \text{sinc}(\omega_0 r - \pi)] + \\ + 0,09524 [\text{sinc}(\omega_0 r + 2\pi) + \text{sinc}(\omega_0 r - 2\pi)].$$

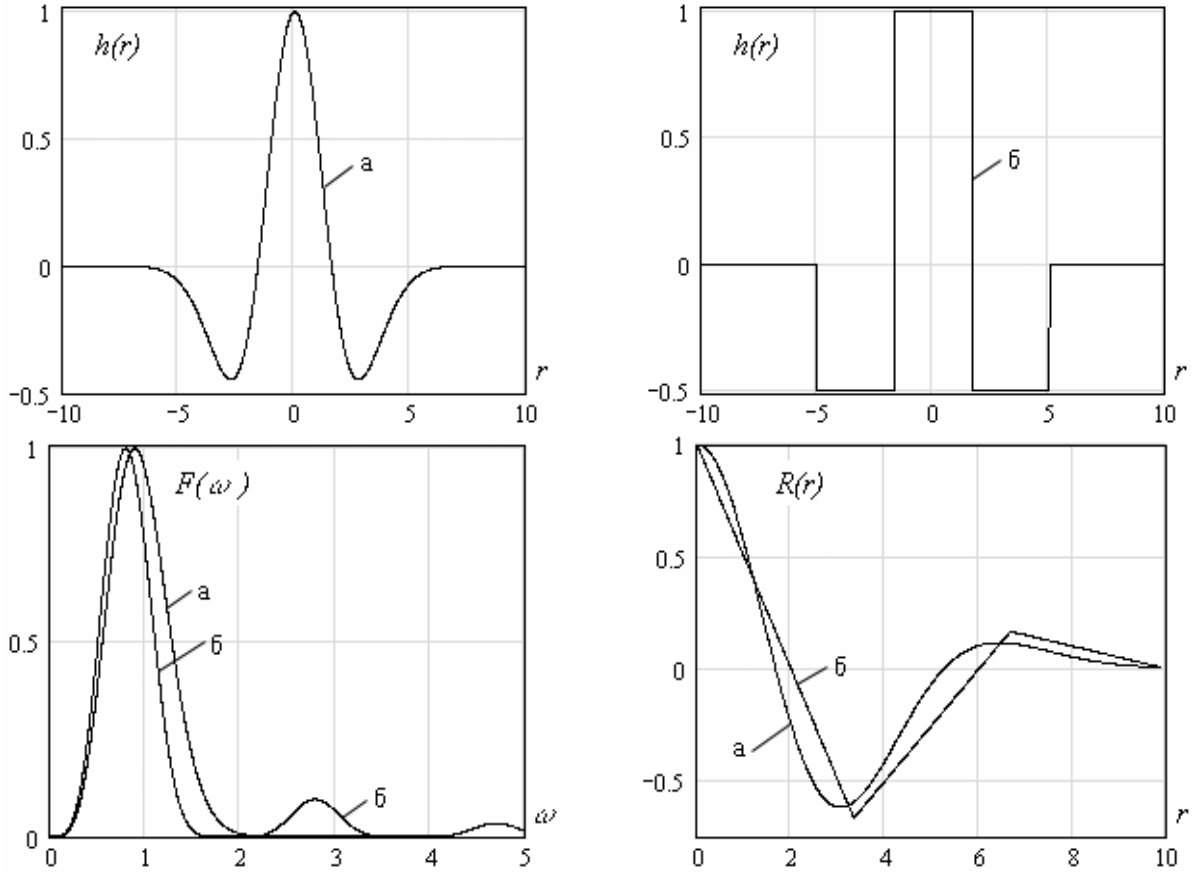


Рис. 6. Вейвлеты “Мексиканская шляпа” и “Французская шляпа”, $r_0 = 5$, $\beta = \pi/5$

3.5. Окно Римана (рис. 8, б)

$$F(\omega) = \text{sinc}\left(\pi \frac{\omega}{\omega_0}\right) \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = \frac{\text{Si}(\omega_0 r + \pi) - \text{Si}(\omega_0 r - \pi)}{2\text{Si}(\pi)}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0}{\pi^2} \text{Si}(\pi),$$

где Si – интегральный синус [2].

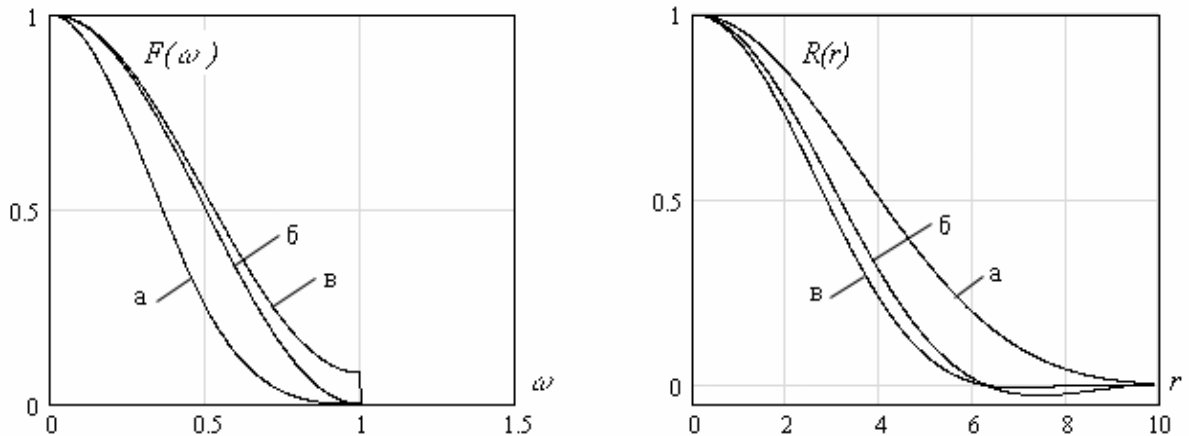


Рис. 7. Энергетические спектры в виде окон Парзена, Ханна и Хэмминга, $\omega_b = 1$

3.6. Окно Кайзера (настраиваемое окно) [3] (рис. 8, в)

Окно Кайзера является относительно простой аппроксимацией так называемых вытянутых сфероидальных волновых функций, преобразование Фурье которых имеет минимальную энергию за пределами заданного временного (частотного) интервала.

$$F(\omega) = \frac{I_0 \left(\beta \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_b} \right)^2} \right)}{I_0(\beta)} \Pi \left(\frac{\omega}{\omega_b} \right), \quad R(r) = \begin{cases} \frac{\beta \operatorname{sh} \left[\sqrt{\beta^2 - (\omega_b r)^2} \right]}{\operatorname{sh}(\beta) \sqrt{\beta^2 - (\omega_b r)^2}}, & |r| < \frac{\beta}{\omega_b}, \\ \frac{\beta \sin \left[\sqrt{(\omega_b r)^2 - \beta^2} \right]}{\operatorname{sh}(\beta) \sqrt{(\omega_b r)^2 - \beta^2}}, & |r| > \frac{\beta}{\omega_b}, \\ \frac{\beta}{\operatorname{sh}(\beta)}, & |r| = \frac{\beta}{\omega_b}. \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \frac{\omega_b \operatorname{sh}(\beta)}{\pi \beta I_0(\beta)},$$

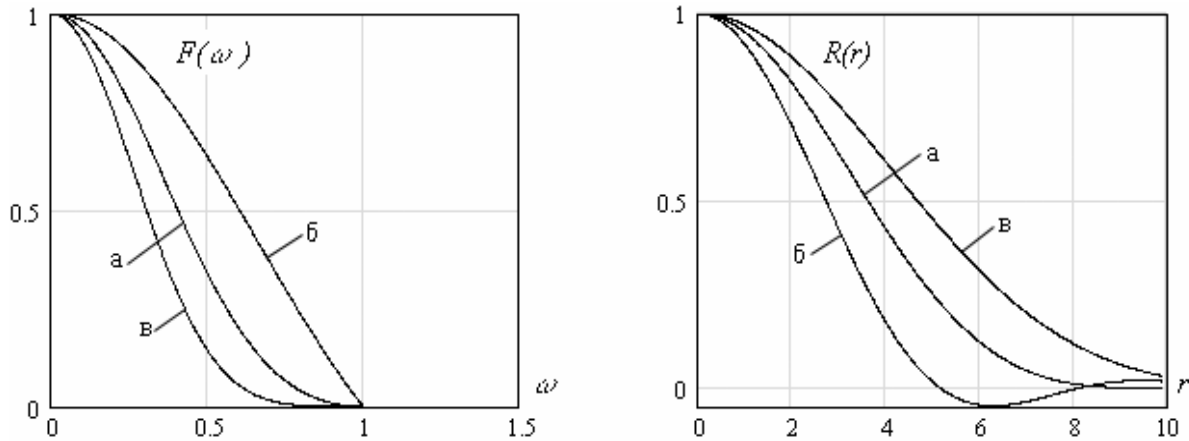


Рис. 8. Энергетические спектры в виде окон Блэкмана, Римана и Кайзера, $\omega_b = 1, \beta = 15$

4. Формирование ЭС путем дополнения до четности известных в теории вероятностей и математической статистике многочисленных плотностей вероятности

Дополненную до четности плотность вероятности можно использовать в качестве нормированного энергетического спектра. При этом функция для коэффициента корреляции выражается через характеристическую функцию [4]:

$$F(\omega) = 0,5 [p(\omega) + p(-\omega)], \quad R(r) = 0,5 [\theta(r) + \theta(-r)], \quad \sigma^2 = \frac{1}{2\pi}.$$

4.1. Энергетический спектр в виде дополненной плотности вероятности Коши (рис. 9)

$$F(\omega) = k_0 \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right], \quad R(r) = \exp(-\alpha |r|) \cos(\omega_0 r),$$

$$\sigma^2 = \frac{k_0}{\alpha}, \quad \text{где } k_0 = \frac{2\omega_0 (\omega_0^2 + \alpha^2 - \omega_0 \sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2})}{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}}.$$

4.2. Энергетический спектр в виде дополненного гамма-распределения (рис. 10)

$$F(\omega) = \left(\frac{|\omega|}{\alpha\beta}\right)^\alpha \exp\left(\alpha - \frac{|\omega|}{\beta}\right), \quad R(r) = (1 + \beta^2 r^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}} \cos[(1+\alpha)\arctg(\beta r)],$$

$$\sigma^2 = \frac{\beta\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha.$$

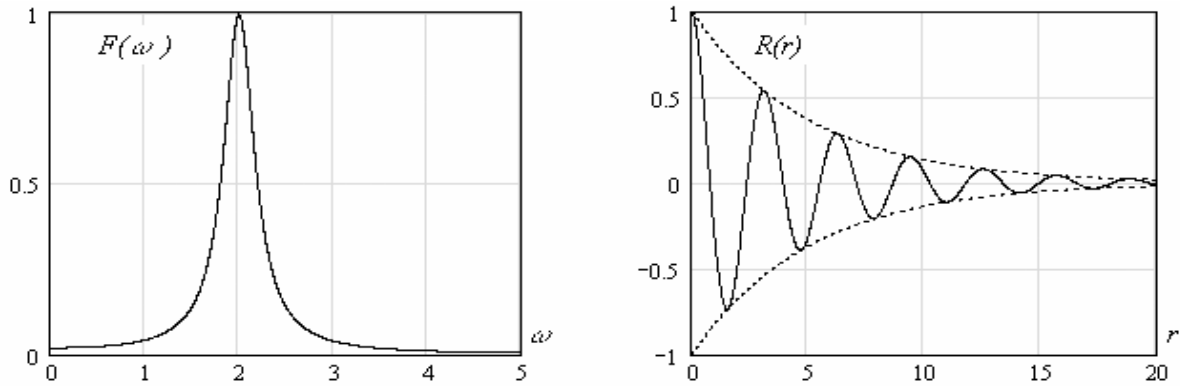


Рис. 9. Энергетический спектр в виде дополненной плотности вероятности Коши, $\omega_0 = 2, \alpha = 0,2$

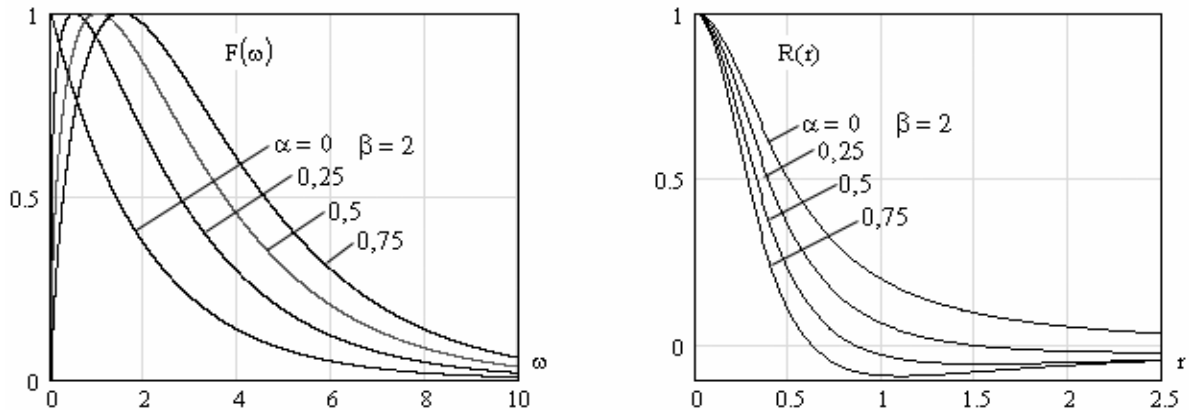


Рис. 10. Энергетический спектр в виде дополненного гамма-распределения

4.3. Энергетический спектр в виде дополненной плотности вероятности модуля нормальной СВ (рис. 11)

$$F(\omega) = \frac{\exp\left[-\frac{(\omega+m)^2}{2\sigma^2}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega-m)^2}{2\sigma^2}\right]}{1 + \exp\left(\frac{2m^2}{\sigma^2}\right)}, \quad \sigma^2 = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi} \left[1 + \exp\left(-\frac{2m^2}{\sigma^2}\right)\right]}$$

$$R(r) = \cos(mr) \exp\left(-\frac{\sigma^2 r^2}{2}\right).$$

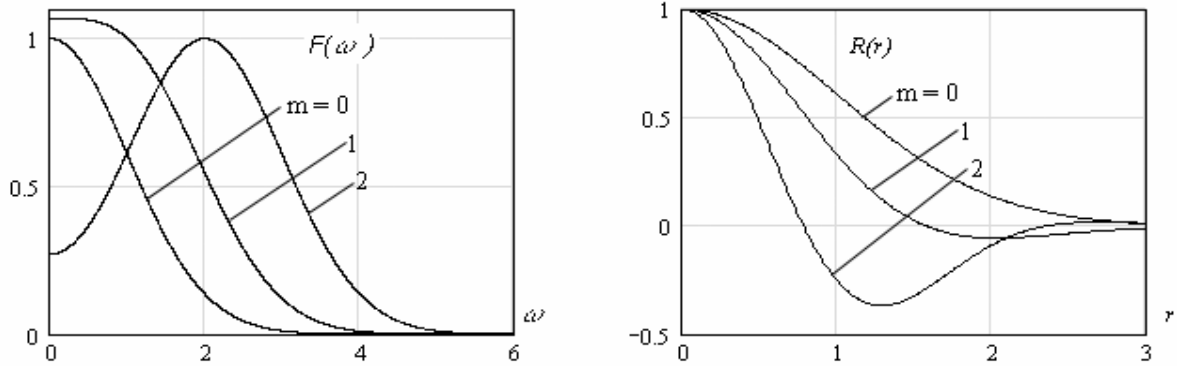


Рис. 11. Энергетический спектр в виде дополненной плотности вероятности модуля нормальной СВ, $\sigma = 1$

4.4. Энергетический спектр в виде закона арксинуса (рис. 12)

$$F(\omega) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad R(r) = J_0(ar), \quad \sigma^2 = \frac{a}{2}.$$

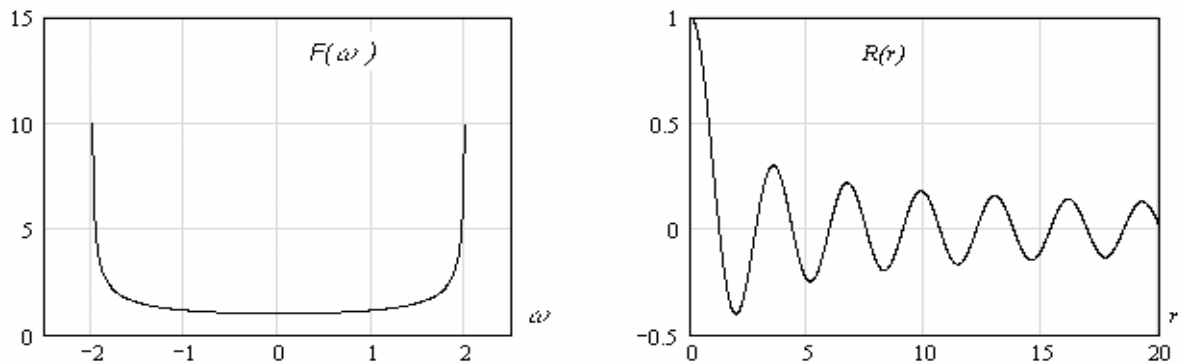


Рис. 12. Энергетический спектр в виде закона арксинуса, $a = 2$

5. Получение из одних ЭС других, путем умножения на полином четной степени с положительными коэффициентами

Запишем полином с положительными коэффициентами a_{2n} $P(\omega) = \sum_n a_{2n} \omega^{2n}$,

тогда корреляционная функция случайного процесса, пропущенного через дифференцирующий фильтр n -го порядка, примет вид:

$$K_{\text{вых}}(r) = \sum_n a_{2n} i^{2n} K_{\text{вх}}^{(2n)}(r), \quad \text{где } i = \sqrt{-1}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

5.1. Противозумовая коррекция (вариант 1) (рис. 13)

$$F(\omega) = (a + b\omega^2) \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad \sigma^2 = \frac{a\omega_0}{\pi} \left(1 + \frac{b}{3a}\omega_0^2\right),$$

$$R(r) = \left(1 + \frac{b}{3a}\omega_0^2\right)^{-1} \left[\frac{\sin(\omega_0 r)}{\omega_0 r} + \frac{b}{a}\omega_0^2 \left(\frac{\sin(\omega_0 r)}{\omega_0 r} + 2 \frac{\cos(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^2} - 2 \frac{\sin(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^3} \right) \right].$$

5.2. Противозумовая коррекция (вариант 2) (рис. 14)

$$F(\omega) = (a + b\omega^2) \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\omega_0^2}\right), \quad \sigma^2 = \frac{a\omega_0}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{2b}{a}\omega_0^2\right),$$

$$R(r) = \left(1 + \frac{2b}{a}\omega_0^2\right)^{-1} \left[1 + \frac{2b}{a}\omega_0^2 (1 - 2\omega_0^2 r^2) \right] \exp(-\omega_0^2 r^2).$$

6. Переход от ФНЧ к ПФ путем сдвига (раздвоения) ФНЧ на $\pm\omega_0$

6.1. Полосовой фильтр (рис. 15, а)

$$F(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_e}\right) - \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right), \quad \text{где } \omega_e = \omega_0 + \Delta\omega, \quad \omega_n = \omega_0 - \Delta\omega,$$

$$R(r) = \frac{\sin(\Delta\omega r)}{\Delta\omega r} \cos(\omega_0 r), \quad \sigma^2 = \frac{2\Delta\omega}{\pi}.$$

6.2. Гауссов радиопольтер (рис. 15, б)

$$F(\omega) = \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2 + (\omega - \omega_0)^2}{\omega_e^2}\right], \quad R(r) = \exp\left[-\frac{\omega_e^2 r^2}{4}\right] \cos(\omega_0 r), \quad \sigma^2 = \frac{\omega_e}{\sqrt{\pi}}.$$

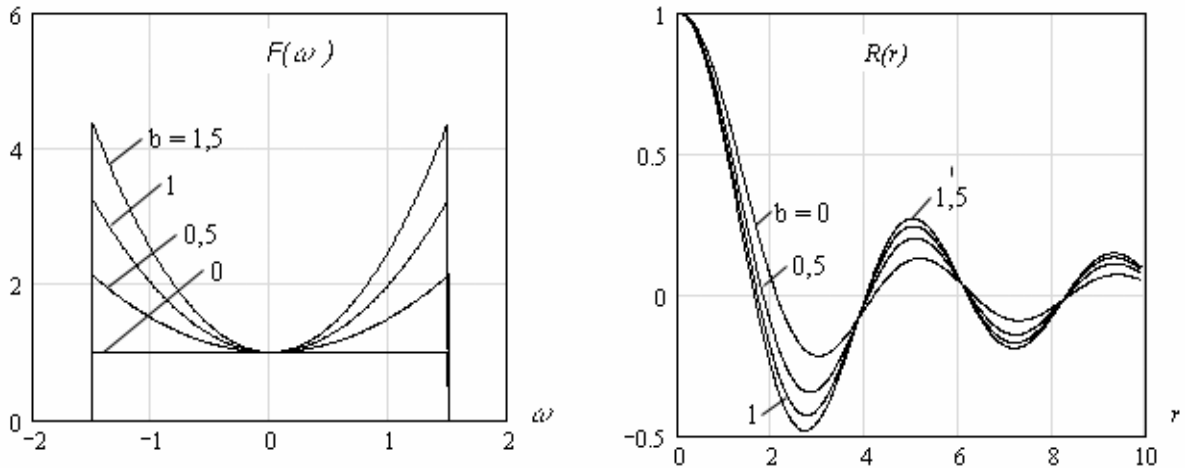


Рис. 13. Противошумовая коррекция (вариант 1), $a = 1$, $\omega_b = 1,5$

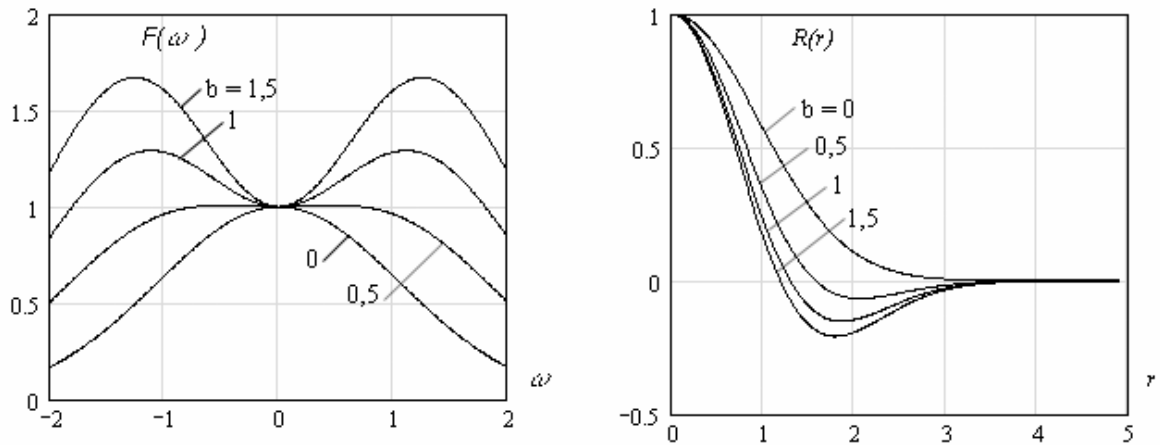


Рис. 14. Противошумовая коррекция (вариант 2), $a = 1$, $\omega_0 = 0,75$

6.3. “Расщепленный” спектр треугольного вида (рис. 15, в)

$$F(\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{|\omega + \omega_0|}{\Delta\omega}, & |\omega + \omega_0| \leq \Delta\omega, \\ 1 - \frac{|\omega - \omega_0|}{\Delta\omega}, & |\omega - \omega_0| \leq \Delta\omega, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad R(r) = \left[\frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega r}{2}\right)}{\frac{\Delta\omega r}{2}} \right]^2 \cos(\omega_0 r), \quad \sigma^2 = \frac{\Delta\omega}{\pi}.$$

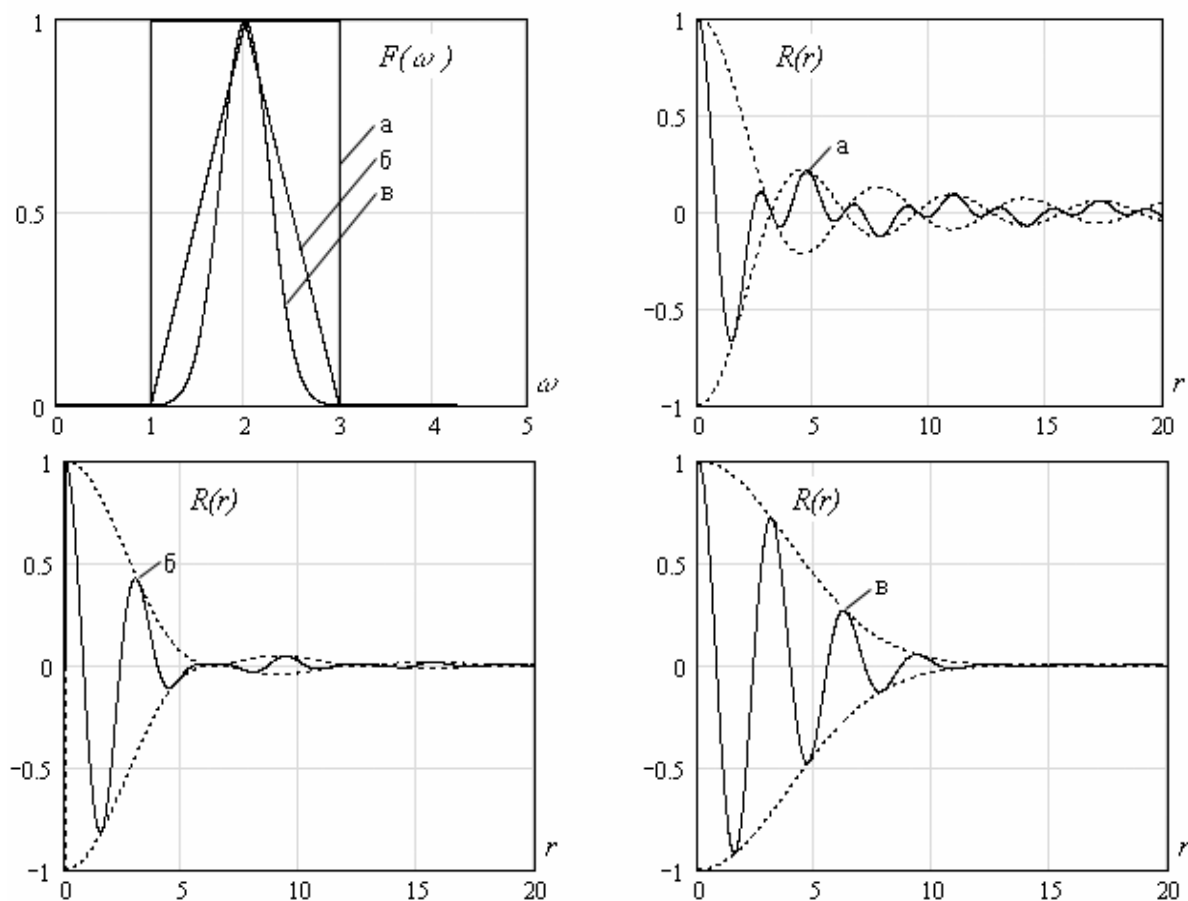


Рис. 15. Полосовые фильтры, $\omega_0 = 2$, $\Delta\omega = 1$

ЛИТЕРАТУРА

1. Глазов Г.Н., Костевич А.Г. Банк ковариационных функций и энергетических спектров случайных процессов и полей. 1. Эвристическое формирование. – В кн.: Интеллектуальные системы в управлении, конструировании и образовании. Томск: STT, 2004. – Вып. № 3, с. 110 – 125.
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 832 с.
3. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
4. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.