

**БАНК КОВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ.
3. РЕГУЛЯРНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ В ДВУМЕРНОМ И ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЯХ**

Опубликовано: В кн. «Интеллектуальные системы в управлении, конструировании и образовании». Вып. 4/Под ред. А. А. Шелупанова. – Томск: Изд-во Института оптики атмосферы СО РАН, 2005. Стр. 121-133.

В статье [1] была обоснована необходимость составления банка ковариационных функций (КФ) и энергетических спектров (ЭС) случайных процессов и полей, сделаны основные определения и ограничения, выяснены свойства КФ и ЭС, перечислены предложенные авторами регулярные способы формирования пар КФ – ЭС, приведены примеры пар, полученных эвристическим подбором. В данной статье приведены примеры регулярного формирования пар КФ – ЭС для двумерных и трехмерных полей.

1. Способ эвристического подбора импульсной характеристики (двумерное изотропное поле)

Этот способ упомянут в [1] и включает этапы:

а) Подбор импульсной характеристики $h(r)$ или передаточной функции $S(\omega)$ двумерного или трехмерного линейного фильтра, формирующего случайное поле из “белого” поля; здесь $r = |\mathbf{r}|$, т.е. в двумерном случае $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, в трехмерном $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$, т.е. в двумерном случае $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$, в трехмерном $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$.

б) В двумерном случае, если подобрана $h(r)$, то находится $S(\omega)$ как

$$S(\omega) = 2\pi \int_0^{\infty} h(r) J_0(\omega r) r \, dr \quad (1)$$

(прямое преобразование Ганкеля), затем энергетический спектр как

$$F(\omega) = S^2(\omega), \quad (2)$$

и корреляционная функция как

$$K(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) J_0(\omega r) \omega \, d\omega, \quad (3)$$

(обратное преобразование Ганкеля). Если подобрана $S(\omega)$, то $F(\omega)$ и $K(r)$ находятся по (2), (3).

В трехмерном случае, если подобрана $h(r)$, то

$$S(\omega) = 4\pi \int_0^{\infty} h(r) \frac{\sin(\omega r)}{\omega r} r^2 \, dr, \quad (4)$$

затем находим $F(\omega)$ по (2), наконец,

$$K(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} F(\omega) \frac{\sin(\omega r)}{\omega r} \omega^2 \, d\omega. \quad (5)$$

Если подобрана $S(\omega)$, то $F(\omega)$ и $K(r)$ находятся по (2), (5).

1.1. Импульсная характеристика (ИХ) в виде цилиндра (рис. 1)

Определим функцию $\text{circ}(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$

Тогда $h(r) = \text{circ}\left(\frac{r}{r_0}\right)$, $K(r) = \pi r_0^2 \left[\frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{r}{2r_0}\right) - \frac{r}{2r_0} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2r_0}\right)^2} \right] \text{circ}\left(\frac{r}{2r_0}\right)$,

$S(\omega) = 2\pi r_0^2 \frac{J_1(\omega r_0)}{\omega r_0}$, $F(\omega) = |S(\omega)|^2$, $\sigma^2 = \pi r_0^2$.

На рис. 1а показаны ИХ $h(r)$ (левая часть рисунка) и $S(\omega)$, на рис. 1б – КФ $K(r)$ (левая часть рисунка) и ЭС $F(\omega)$.

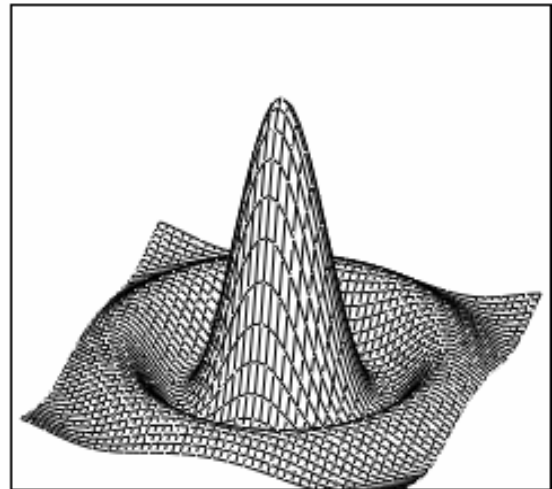
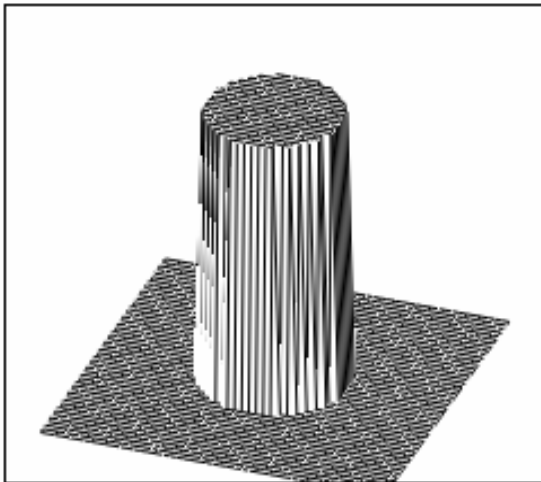


Рис. 1 а. Импульсная характеристика в виде цилиндра и $S(\omega)$; $r_0 = 0,4$

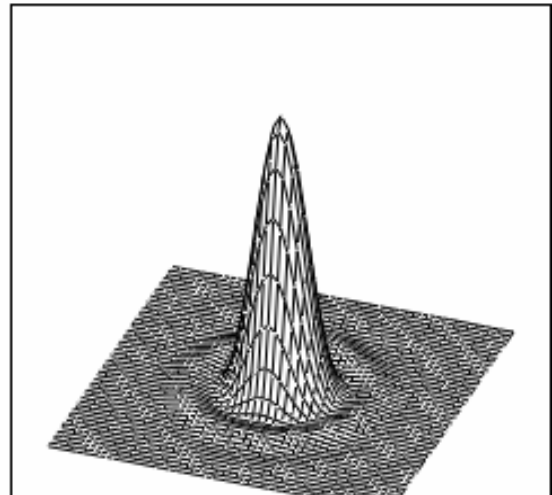
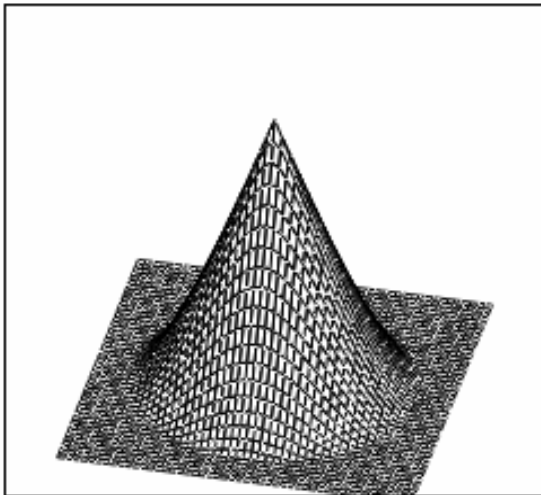


Рис. 1 б. Ковариационная функция и энергетический спектр; $r_0 = 0,4$

1.2. Импульсная характеристика в виде конуса (рис. 2)

Выражения для $h(r)$ и последующих характеристик имеют вид:

$h(r) = \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \text{circ}\left(\frac{r}{r_0}\right)$, $S(\omega) = \pi^2 r_0^2 \frac{J_1(\omega r_0)H_0(\omega r_0) - J_0(\omega r_0)H_1(\omega r_0)}{(\omega r_0)^2}$,

$$K(r) = 4 \int_0^{\arccos\left(\frac{r}{2r_0}\right)} \int_{\frac{r}{2\cos(\varphi)}}^{r_0} \left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi)}}{r_0}\right) \rho d\rho d\varphi,$$

$$F(\omega) = |S(\omega)|^2, \quad \sigma^2 = \frac{\pi r_0^2}{6}.$$

Здесь H_0, H_1 – функции Струве [3], J_0, J_1 – функции Бесселя первого рода [3].

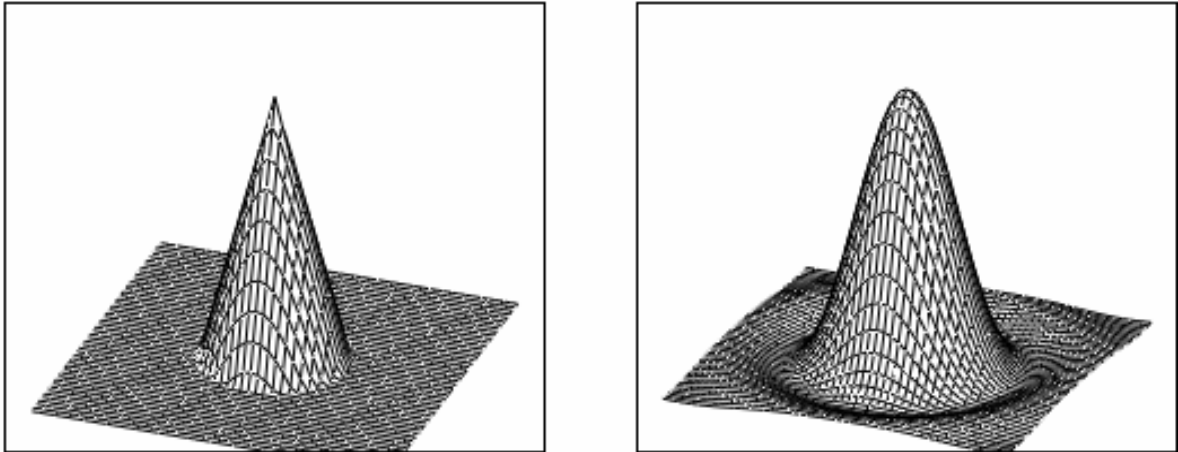


Рис. 2 а. Импульсная характеристика в виде конуса и $S(\omega)$; $r_0 = 0,4$

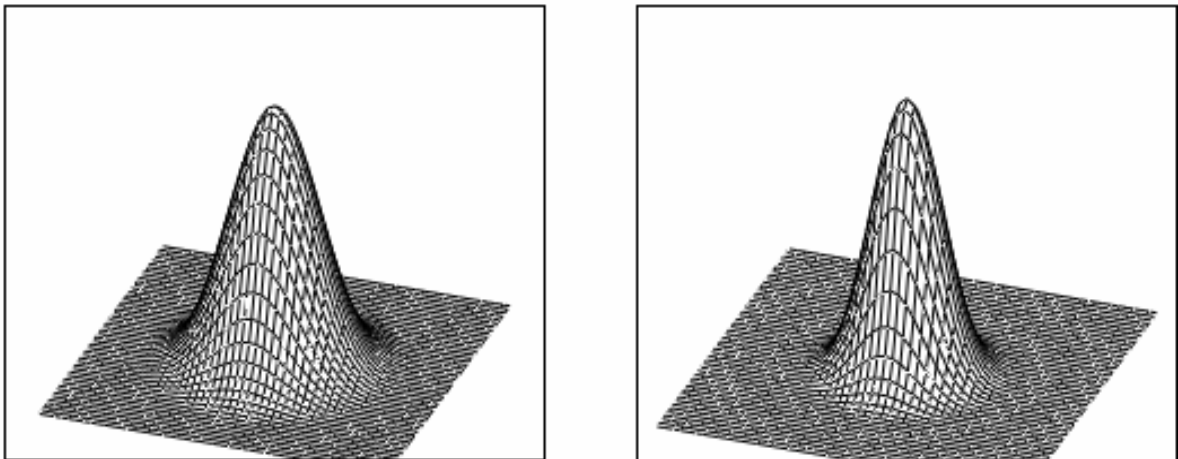


Рис. 2 б. Ковариационная функция и энергетический спектр; $r_0 = 0,4$

1.3. Импульсная характеристика в виде круглой “трубы” (рис. 3)

$$h(r) = \text{circ}\left(\frac{r}{r_g}\right) - \text{circ}\left(\frac{r}{r_h}\right), \quad S(\omega) = 2\pi \left[r_g^2 \frac{J_1(\omega r_g)}{\omega r_g} - r_h^2 \frac{J_1(\omega r_h)}{\omega r_h} \right], \quad F(\omega) = |S(\omega)|^2.$$

$$\text{Обозначим } \beta(z, z_g) = 2 \arccos\left(\frac{z}{2z_g}\right), \quad \beta_1(z, z_g, z_h) = 2 \arccos\left(\frac{z_g^2 - z_h^2 + z^2}{2zz_g}\right),$$

$$\beta_2(z, z_g, z_h) = 2 \arccos\left(\frac{z_g^2 - z_h^2 - z^2}{2zz_h}\right).$$

$$\text{Тогда } K_1(z, z_g) = z_g^2 \left\{ \beta(z, z_g) - \sin[\beta(z, z_g)] \right\} \text{circ}\left(\frac{z}{2z_g}\right),$$

$$K_2(z, z_H) = z_H^2 \left\{ \beta(z, z_H) - \sin[\beta(z, z_H)] \right\} \text{circ}\left(\frac{z}{2z_H}\right),$$

$$K_3(z, z_\theta, z_H) = \left\{ \pi z_H^2 + \frac{z_\theta^2}{2} [\beta_1(z, z_\theta) - \sin[\beta_1(z, z_\theta)]] - \right. \\ \left. - \frac{z_H^2}{2} [\beta_2(z, z_H) - \sin[\beta_2(z, z_H)]] \right\} \text{circ}\left(\frac{z}{z_\theta + z_H}\right),$$

$$K_4(z, z_\theta, z_H) = \begin{cases} \pi z_H^2, & 0 \leq z \leq z_\theta - z_H, \\ K_3(z, z_\theta, z_H), & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$K(r) = K_1(r, r_\theta) + K_2(r, r_H) - 2K_4(r, r_\theta, r_H), \quad \sigma^2 = \pi(r_\theta^2 - r_H^2).$$

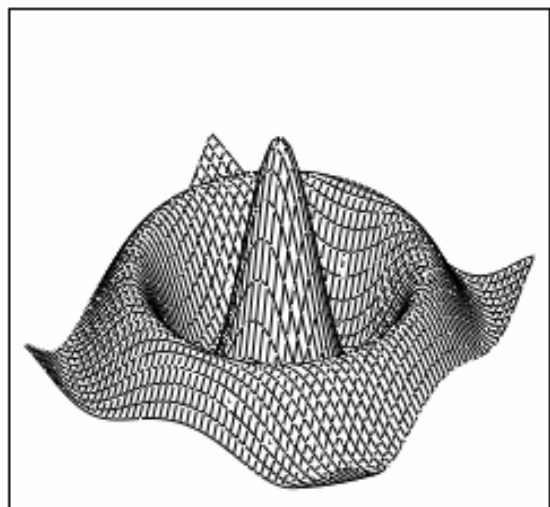
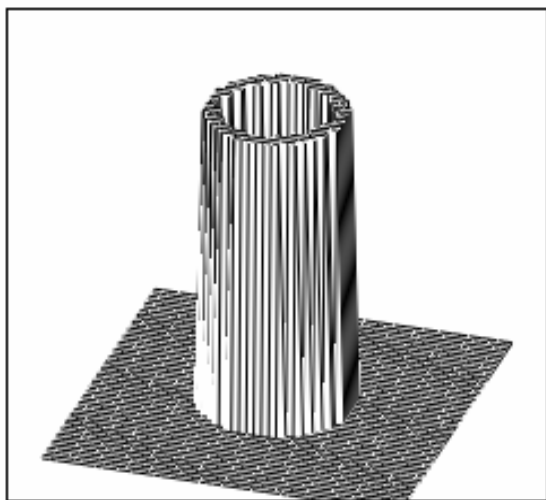


Рис. 3 а. Импульсная характеристика в виде круглой “трубы” и $S(\omega)$; $r_\theta = 0,4$, $r_H = 0,3$

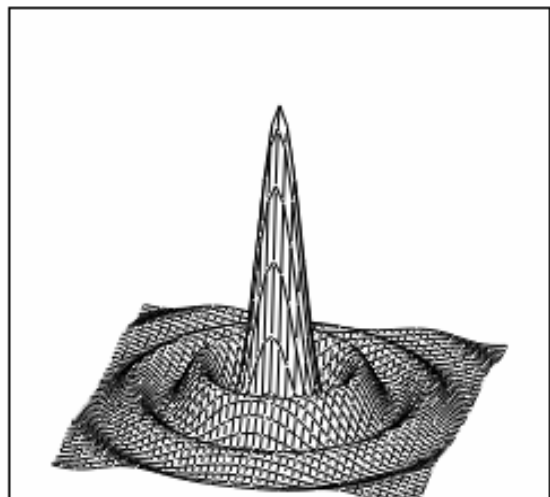
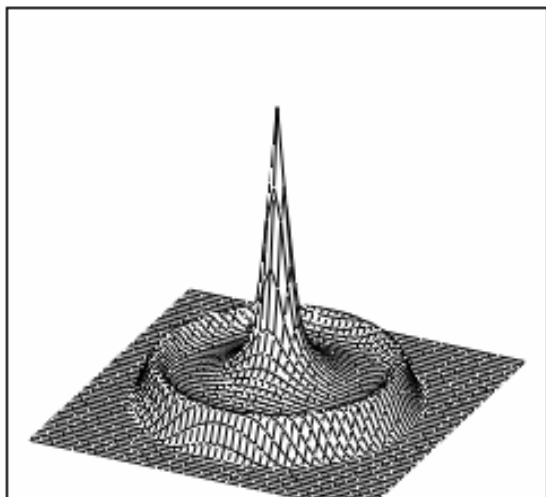


Рис. 3 б. Ковариационная функция и энергетический спектр; $r_\theta = 0,4$, $r_H = 0,3$

2. Факторизованные пары КФ – ЭС (двумерное поле)

2.1. Импульсная характеристика в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 4)

$$\text{Определим функцию } \text{rect}(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |r| \leq 0,5, \\ 0, & |r| > 0,5. \end{cases}$$

Тогда $h(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{x_0}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{y_0}\right)$, $K(x, y) = x_0 y_0 \left(1 - \frac{|x|}{x_0}\right) \left(1 - \frac{|y|}{y_0}\right) \text{rect}\left(\frac{x}{2x_0}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{2y_0}\right)$,

$$S(\omega_x, \omega_y) = x_0 y_0 \frac{\sin\left(\frac{\omega_x x_0}{2}\right)}{\frac{\omega_x x_0}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega_y y_0}{2}\right)}{\frac{\omega_y y_0}{2}}, \quad F(\omega_x, \omega_y) = |S(\omega_x, \omega_y)|^2, \quad \sigma^2 = x_0 y_0.$$

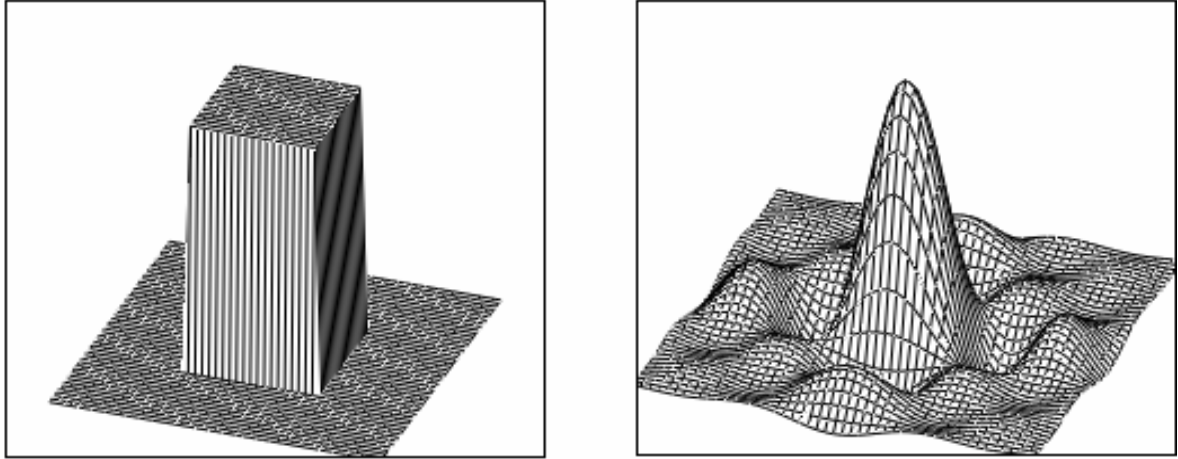


Рис. 4 а. Импульсная характеристика в виде прямоугольного параллелепипеда и $S(\omega)$; $x_0 = y_0 = 0,8$

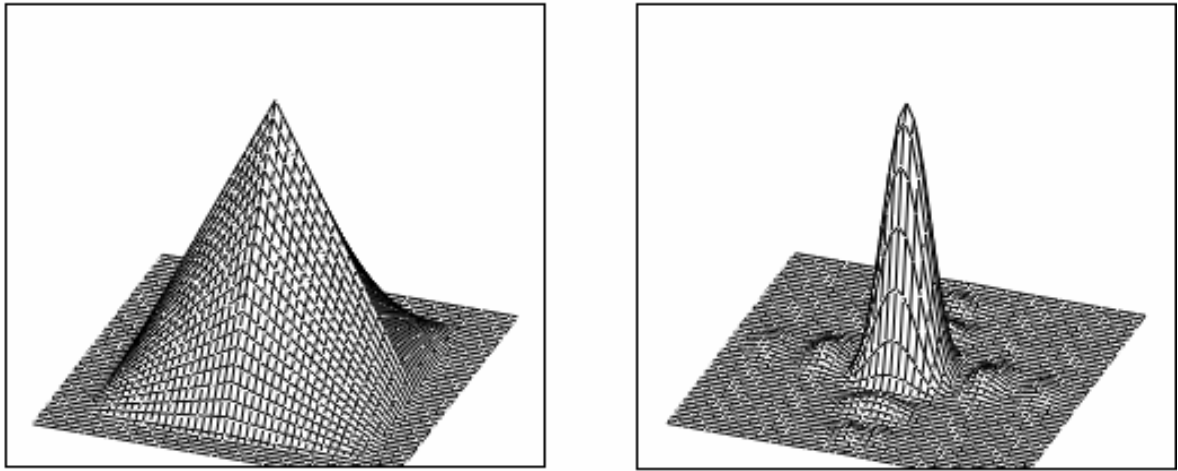


Рис. 4 б. Ковариационная функция и энергетический спектр; $x_0 = y_0 = 0,8$

2.2. Факторизованная экспоненциальная корреляционная функция (рис. 5)

$$K(x, y) = \exp\left(-\frac{|x| + |y|}{r_0}\right), \quad F(\omega_x, \omega_y) = \frac{4r_0^2}{[1 + (\omega_x r_0)^2][1 + (\omega_y r_0)^2]},$$

2.3. Смешанная факторизованная пара КФ – ЭС (рис. 6)

Пара факторизованных КФ и ЭС может быть построена не только из однородных множителей, как в примерах 2.1, 2.2, но также из разнородных, как в данном примере.

$$F(\omega_x, \omega_y) = \frac{e}{2} \left(\frac{\omega_x}{\beta}\right)^2 \exp\left(-\frac{\omega_x^2}{2\beta^2}\right) \text{rect}\left(\frac{\omega_y}{2\omega_0}\right),$$

$$R(x, y) = (1 - \beta^2 x^2) \exp\left(-\frac{\beta^2 x^2}{2}\right) \frac{\sin(\omega_0 y)}{\omega_0 y}, \quad \sigma^2 = \frac{\beta e \omega_0}{\sqrt{8\pi^3}}.$$

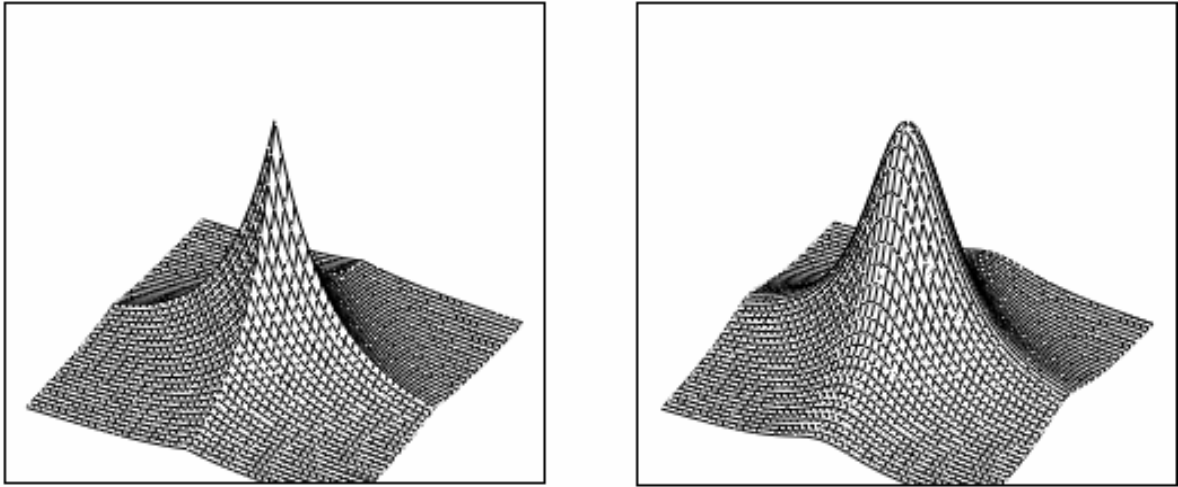


Рис.5. Ковариационная функция и энергетический спектр; $r_0 = 0,4$

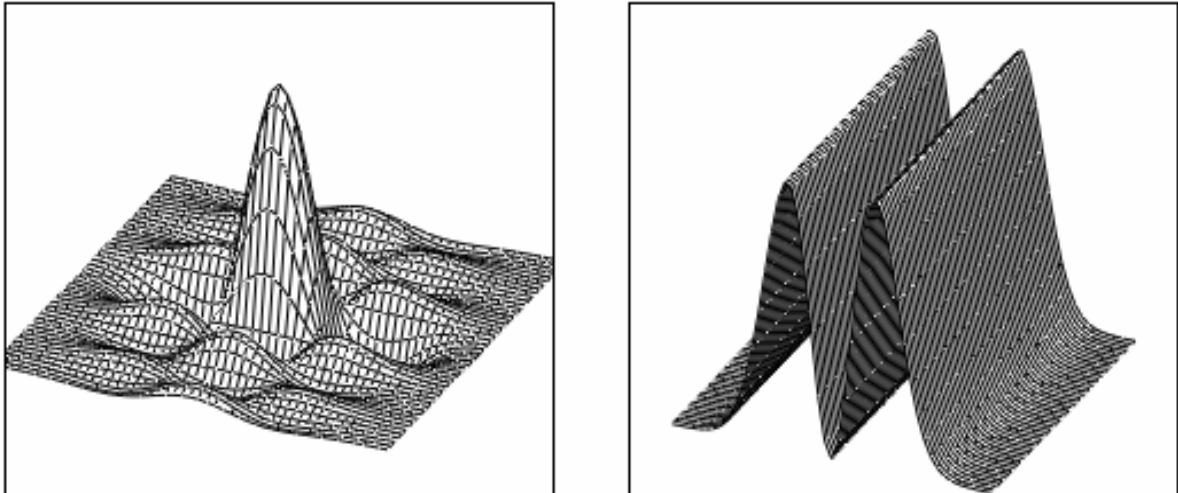


Рис. 6. Ковариационная функция и энергетический спектр; $\omega_0 = 15, \beta = 1,25\pi$

3. Способ поворота импульсной характеристики (двумерное поле)

Способ факторизованных ИХ можно расширить, используя вращение ИХ вокруг оси, перпендикулярной плоскости ХУ. Сначала рассмотрим пример без поворота, затем два примера с поворотом.

3.1. Импульсная характеристика в виде прямоугольной “трубы” с гранями, параллельными осям координат (рис. 7)

$$h(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{x_e}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{y_e}\right) - \text{rect}\left(\frac{x}{x_n}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{y_n}\right),$$

$$\text{Обозначим } K_1(x, y, x_0, y_0) = x_0 y_0 \left(1 - \frac{|x|}{x_0}\right) \left(1 - \frac{|y|}{y_0}\right) \text{rect}\left(\frac{x}{2x_0}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{2y_0}\right),$$

$$K_2(z, z_H, z_\epsilon) = \begin{cases} z_H, & 0 \leq |z| \leq \frac{z_\epsilon - z_H}{2}, \\ \frac{z_\epsilon + z_H}{2} - |z|, & \frac{z_\epsilon - z_H}{2} \leq |z| \leq \frac{z_\epsilon + z_H}{2}, \\ 0, & |z| > \frac{z_\epsilon + z_H}{2}, \end{cases}$$

тогда КФ примет вид:

$$K(x, y) = K_1(x, y, x_\epsilon, y_\epsilon) + K_1(x, y, x_H, y_H) - 2K_2(x, x_\epsilon, x_H)K_2(y, y_\epsilon, y_H);$$

$$S(\omega_x, \omega_y) = x_\epsilon y_\epsilon \frac{\sin\left(\frac{\omega_x x_\epsilon}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_y y_\epsilon}{2}\right)}{\frac{\omega_x x_\epsilon}{2} \frac{\omega_y y_\epsilon}{2}} - x_H y_H \frac{\sin\left(\frac{\omega_x x_H}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_y y_H}{2}\right)}{\frac{\omega_x x_H}{2} \frac{\omega_y y_H}{2}},$$

$$F(\omega) = |S(\omega)|^2, \quad \sigma^2 = x_\epsilon y_\epsilon - x_H y_H.$$

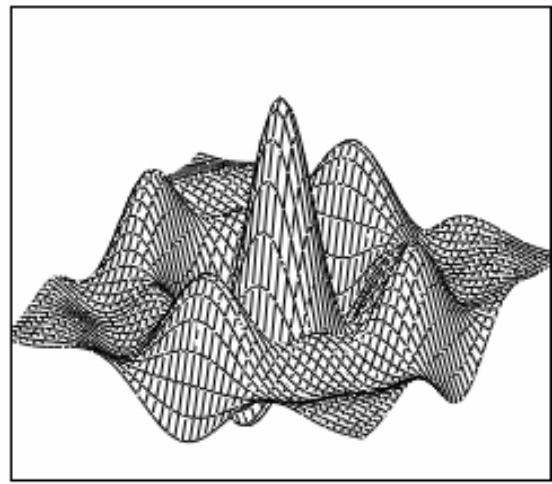
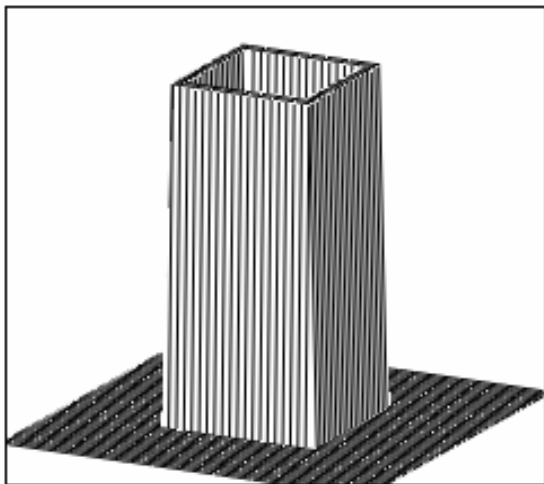


Рис. 7 а. Импульсная характеристика в виде прямоугольной “трубы” и двумерное преобразование Фурье от неё; $x_\epsilon = y_\epsilon = 0,8$, $x_H = y_H = 0,6$

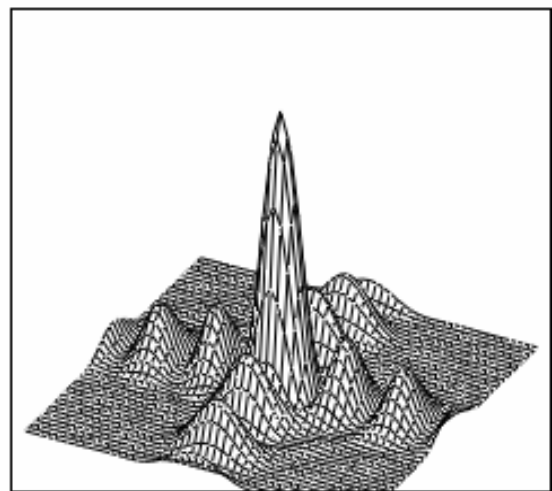
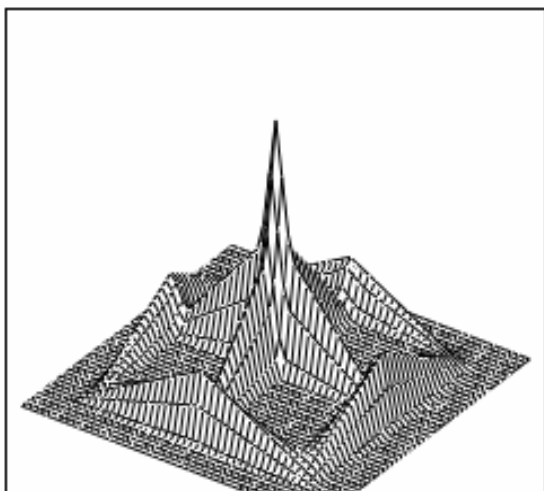


Рис. 7 б. Ковариационная функция и энергетический спектр; $x_\epsilon = y_\epsilon = 0,8$, $x_H = y_H = 0,6$

3.2. Импульсная характеристика в виде “повернутого” на α градусов прямоугольного параллелепипеда (рис. 8)

Матрица поворота на угол α имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Координаты в новых системах будут:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{bmatrix}.$$

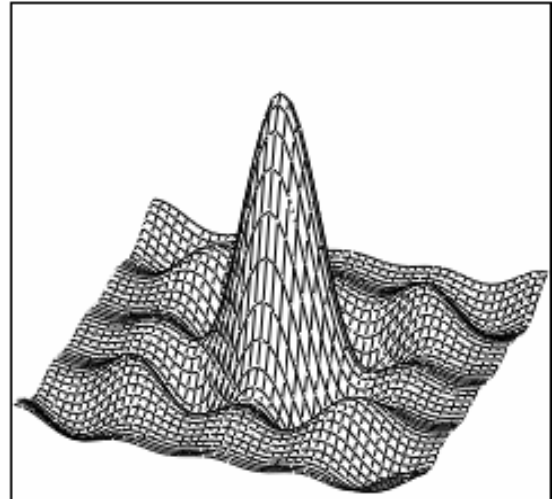
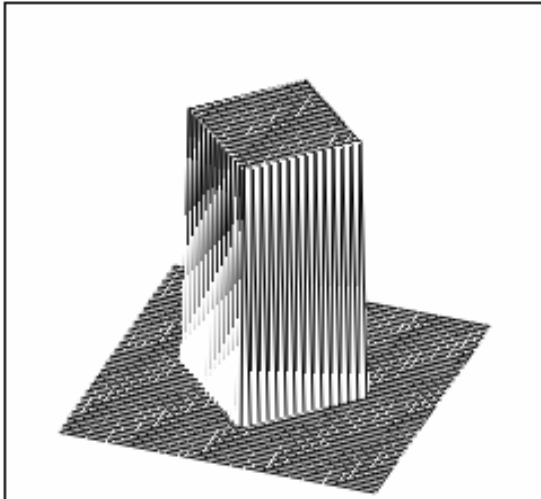


Рис. 8 а. Импульсная характеристика в виде “повернутого” на $\alpha = 45$ градусов прямоугольного параллелепипеда и $S(\omega)$; $x_0 = y_0 = 0,8$

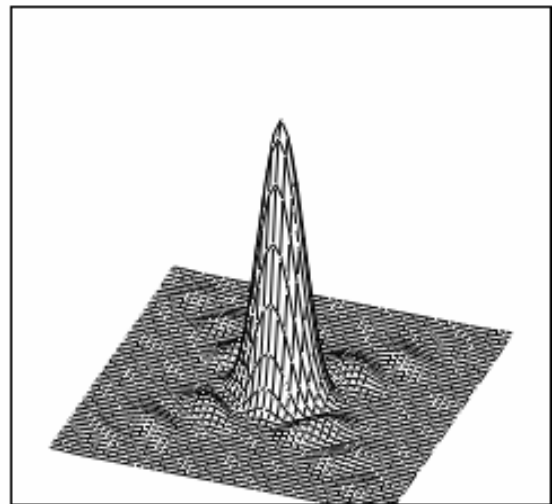
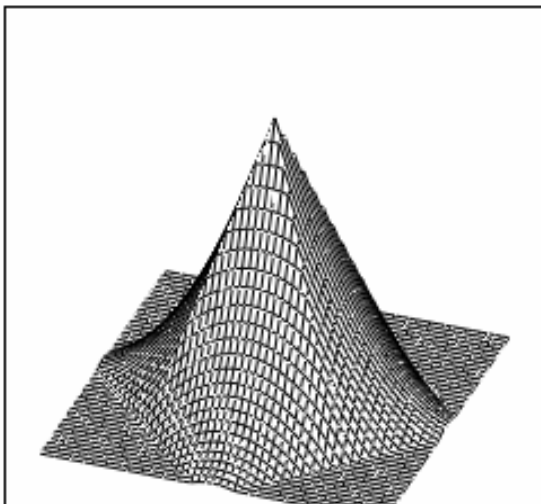


Рис. 8 б. Ковариационная функция и энергетический спектр; $x_0 = y_0 = 0,8$

3.3. Импульсная характеристика в виде “повернутой” на $\alpha = 45$ градусов прямоугольной “трубы” (рис. 9).

4. Эвристический подбор импульсных характеристик в трехмерном случае

4.1. Импульсная характеристика в виде прямоугольного параллелепипеда с гранями, параллельными осям координат

$$h(x, y, z) = \text{rect}\left(\frac{x}{x_0}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{y_0}\right) \text{rect}\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad \sigma^2 = x_0 y_0 z_0,$$

$$K(x, y, z) = x_0 y_0 z_0 \left(1 - \frac{|x|}{x_0}\right) \left(1 - \frac{|y|}{y_0}\right) \left(1 - \frac{|z|}{z_0}\right) \text{rect}\left(\frac{x}{2x_0}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{2y_0}\right) \text{rect}\left(\frac{z}{2z_0}\right),$$

$$S(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = x_0 y_0 z_0 \frac{\sin\left(\frac{\omega_x x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_y y_0}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_z z_0}{2}\right)}{\frac{\omega_x x_0}{2} \frac{\omega_y y_0}{2} \frac{\omega_z z_0}{2}},$$

$$F(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \left[x_0 y_0 z_0 \frac{\sin\left(\frac{\omega_x x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_y y_0}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_z z_0}{2}\right)}{\frac{\omega_x x_0}{2} \frac{\omega_y y_0}{2} \frac{\omega_z z_0}{2}} \right]^2.$$

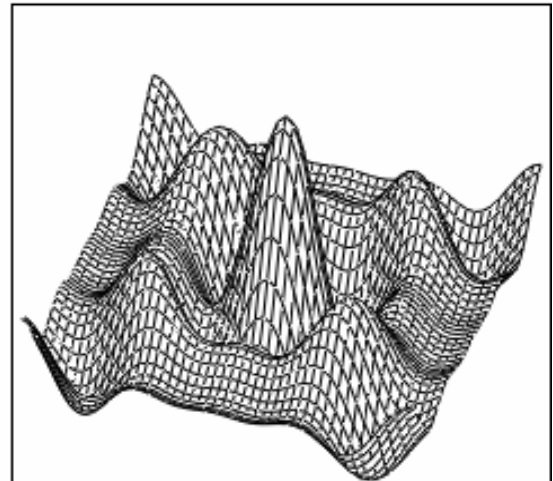
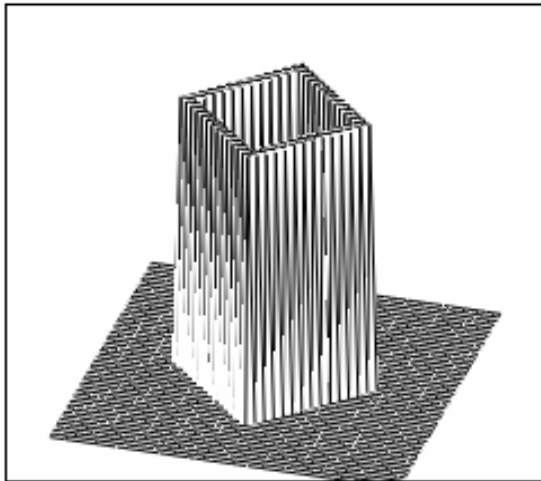


Рис. 9 а. Импульсная характеристика в виде “повернутой” на $\alpha = 45$ градусов прямоугольной “трубы” и $S(\omega)$; $x_B = y_B = 0,8$, $x_H = y_H = 0,6$

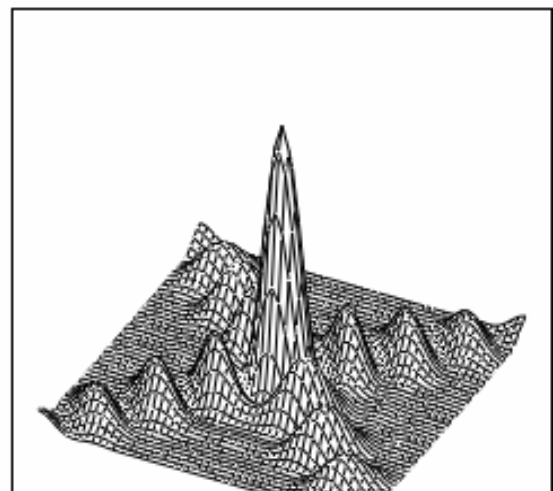
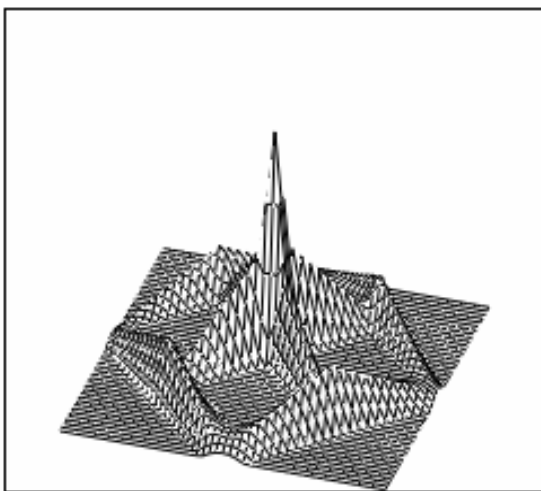


Рис. 9 б. Ковариационная функция и энергетический спектр; $x_B = y_B = 0,8$, $x_H = y_H = 0,6$

4.2. Импульсная характеристика в виде цилиндра с осью, совпадающей с осью Z

$$h(r, z) = \text{circ}\left(\frac{r}{r_0}\right) \text{rect}\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad S(\omega, \omega_z) = 2\pi r_0^2 z_0 \frac{J_1(\omega r_0)}{\omega r_0} \frac{\sin\left(\frac{\omega_z z_0}{2}\right)}{\frac{\omega_z z_0}{2}},$$

$$K(r, z) = \pi r_0^2 z_0 \left[\frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{r}{2r_0}\right) - \frac{r}{2r_0} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2r_0}\right)^2} \right] \left(1 - \frac{|z|}{z_0}\right) \text{circ}\left(\frac{r}{2r_0}\right) \text{rect}\left(\frac{z}{2z_0}\right),$$

$$F(\omega, \omega_z) = |S(\omega, \omega_z)|^2, \quad \sigma^2 = \pi r_0^2 z_0.$$

4.3. Импульсная характеристика в виде шара с центром в начале координат

$$\text{Определим функцию } \text{sphere}(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

$$h(r) = \text{sphere}\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad S(\omega) = 4\pi [\sin(\omega r_0) - \omega r_0 \cos(\omega r_0)] / \omega^3,$$

$$K(r) = 4\pi r_0^3 \left[1 - 3r/(4r_0) + r^3/(16r_0^3)\right] \text{sphere}\left(\frac{r}{2r_0}\right), \quad F(\omega) = |S(\omega)|^2, \quad \sigma^2 = 4\pi r_0^3.$$

5. Поля с эллиптической симметрией

Как показано в [1] и в данной статье, для статистически изотропных случайных полей удобно получать пары КФ – ЭС путем обобщения одномерного случая и использования одномерных КФ и ЭС поля, связанных известными интегральными преобразованиями ([1], формулы (3) – (6)). Это удобство сохраняется и в более широком классе случайных полей с эллиптической (эллипсоидальной) симметрией. Более того, на уровне одномерных КФ и ЭС возникают те же интегралы, что и в изотропном случае.

Действительно, пусть двумерное случайное поле имеет эллиптическую симметрию. Тогда его КФ инвариантна относительно $r = \sqrt{(\alpha x)^2 + (\beta y)^2}$, а ЭС – относительно

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{\omega_x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\omega_y}{\beta}\right)^2}. \text{ Без ограничения общности можно положить } \beta = 1, \text{ тогда } \alpha$$

имеет смысл относительной неизотропности. Теперь нетрудно показать, что одномерные КФ и ЭС связаны преобразованиями Ганкеля

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^\infty K(r) J_0(\omega r) r \, dr, \quad K(r) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty F(\omega) J_0(\omega r) \omega \, d\omega,$$

которые только коэффициентом α отличаются от формул (3), (4) статьи [1].

Пусть теперь трехмерное случайное поле имеет эллипсоидальную симметрию. Тогда КФ инвариантна относительно $r = \sqrt{(\alpha x)^2 + (\beta y)^2 + (\gamma z)^2}$, а ЭС – относительно

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{\omega_x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\omega_y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\gamma}\right)^2}; \text{ положим } \gamma = 1; \text{ можно показать, что одномерные КФ}$$

и ЭС связаны преобразованиями

$$F(\omega) = \frac{4\pi}{\alpha\beta} \int_0^\infty K(r) \frac{\sin(\omega r)}{\omega r} r^2 \, dr, \quad K(r) = \frac{\alpha\beta}{2\pi^2} \int_0^\infty F(\omega) \frac{\sin(\omega r)}{\omega r} \omega^2 \, d\omega,$$

которые только коэффициентом $\alpha\beta$ отличаются от формул (5), (6) статьи [1].

Пример пары КФ – ЭС для двумерного поля с эллиптической симметрией:

$$K(x, y) = \exp\left\{-\left[(\alpha x)^2 + (\beta y)^2\right]\right\}, \quad F(\omega_x, \omega_y) = \frac{\pi}{\alpha \beta} \exp\left\{-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\omega_x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\omega_y}{\beta}\right)^2\right]\right\}$$

(ср. п. 4.7 в [1]).

Пример пары КФ – ЭС для трехмерного поля с эллипсоидальной симметрией:

$$K(x, y, z) = \exp\left\{-\left[(\alpha x)^2 + (\beta y)^2 + (\gamma z)^2\right]\right\},$$
$$F(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \frac{\sqrt{\pi^3}}{\alpha \beta \gamma} \exp\left\{-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\omega_x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\omega_y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\gamma}\right)^2\right]\right\}$$

(ср. п. 5.7 в [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Глазов Г.Н., Костевич А.Г. Банк ковариационных функций и энергетических спектров случайных процессов и полей. 1. Эвристическое формирование. – В кн.: Интеллектуальные системы в управлении, конструировании и образовании. Томск: STT, 2004. – Вып. № 3, с. 110 – 125.
2. Глазов Г.Н., Костевич А.Г. Банк ковариационных функций и энергетических спектров случайных процессов и полей. 2. Регулярное формирование в одномерном случае. – Томск, 2003. – (См. наст. сборник).
3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 832 с.