

**БАНК КОВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ (КФ) И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ (ЭС) СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ.  
4. РЕГУЛЯРНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ “ОКОН”**

Опубликовано: В кн. «Интеллектуальные системы в управлении, конструировании и образовании». Вып. 4/Под ред. А. А. Шелупанова. – Томск: Изд-во Института оптики атмосферы СО РАН, 2005. Стр. 133-142.

При использовании в генезисе ЭС тригонометрических функций и “окон” из спектрального анализа необходимо численное вычисление интеграла вида:

$$I_{\cos}(a, b, c) = \int_0^c \cos(ax) J_0(bx) x dx. \quad (1)$$

Данный интеграл можно вычислить, разложив его в быстросходящийся ряд по функциям Бесселя первого рода:

$$I_{\cos}(a, b, c) \cong c^2 \sum_{n=0}^{N-1} p(ac, n) q(bc, n+1), \quad (2)$$

где  $p(x, n) \cong \sum_{k=0}^{K-1} g(k, n) x^{2(k+n)}$ ,  $g(k, n) = \frac{(-1)^k}{[2(k+n)-1]!!(2k)!!}$ ,  $q(x, n) = \frac{J_n(x)}{x^n}$ ,

$N$  – число членов ряда,  $K$  – параметр, определяющий точность вычисления коэффициентов  $p(x, n)$ . Если  $x \leq \pi/2$ , то при  $N = K = 5$  относительная точность вычисления интеграла (1) по представлению (2) не хуже, чем  $\delta = 0,0048\%$ ; при  $x \leq \pi$ ,  $N = 7$  и  $K = 8$   $\delta = 0,0036\%$  ( $N = 5$  и  $K = 8$   $\delta = 0,716\%$ ); при  $x \leq 3\pi/2$ ,  $N = 9$  и  $K = 10$   $\delta = 0,052\%$ ; при  $x \leq 2\pi$ ,  $N = 12$  и  $K = 15$   $\delta = 0,082\%$ . Точные выражения для первых пяти коэффициентов  $p(x, n)$  в (2) имеют вид:

$$p(x, 0) = \cos(x), \quad p(x, 1) = x \sin(x), \quad p(x, 2) = x[\sin(x) - x \cos(x)],$$

$$p(x, 3) = x(3 - x^2) \sin(x) - 3x^2 \cos(x), \quad p(x, 4) = 3x(5 - 2x^2) \sin(x) - x^2(15 - x^2) \cos(x).$$

Нахождение точных выражений для остальных коэффициентов  $p(x, n)$  связано с громоздкими вычислениями.

**Использование в генезисе ЭС “окон” из спектрального анализа**

1.1. Обобщенное окно ( $n = 1$ ,  $r = x$ ,  $\omega = \omega_x$ )

$$\text{Определим функцию } \Pi(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 1, \\ 0, & |\omega| > 1. \end{cases}$$

Тогда  $F(\omega) = \left[ k_0 + k_1 \cos\left(\frac{\pi \omega}{\omega_0}\right) + k_2 \cos\left(\frac{2\pi \omega}{\omega_0}\right) \right] \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad (3)$

где коэффициенты  $k_0, k_1, k_2$  выбираются исходя из свойств временных “окон”: неотрицательность  $F(\omega) \geq 0$ ; четность  $F(\omega) = F(-\omega)$ ; монотонное убывание в области определения  $-\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0$ . Из условия нормировки максимального значения окна следует

$k_0 + k_1 + k_2 = 1$ , из условия неотрицательности  $k_0 \geq 0,5$ . Функция коэффициента корреляции и дисперсия равны

$$R(r) = \text{sinc}(\omega_0 r) + \frac{k_1}{k_0} \frac{\text{sinc}(\omega_0 r + \pi) + \text{sinc}(\omega_0 r - \pi)}{2} + \frac{k_2}{k_0} \frac{\text{sinc}(\omega_0 r + 2\pi) + \text{sinc}(\omega_0 r - 2\pi)}{2}, \quad (4)$$

где  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ ,  $\sigma^2 = \frac{k_0 \omega_0}{\pi}$ .

1.2. Обобщенное окно ( $n = 2$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ )

Определим функцию  $\text{circ}(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq 1, \\ 0, & \omega > 1. \end{cases}$

$$F(\omega) = \left[ k_0 + k_1 \cos\left(\frac{\pi \omega}{\omega_0}\right) + k_2 \cos\left(\frac{2\pi \omega}{\omega_0}\right) \right] \text{circ}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad (5)$$

$$K(r) = \frac{1}{2\pi} \left[ k_0 \frac{J_1(\omega_0 r)}{\omega_0 r} + k_1 I_{\cos}\left(\frac{\pi}{\omega_0}, r, \omega_0\right) + k_2 I_{\cos}\left(\frac{2\pi}{\omega_0}, r, \omega_0\right) \right], \quad (6)$$

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2 k_0 - 4k_1}{4\pi^3} \omega_0^2, \quad R(r) = \frac{K(r)}{\sigma^2}.$$

1.3. Обобщенное окно ( $n = 3$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$ )

Определим функцию  $\text{sphere}(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq 1, \\ 0, & \omega > 1. \end{cases}$

$$F(\omega) = \left[ k_0 + k_1 \cos\left(\frac{\pi \omega}{\omega_0}\right) + k_2 \cos\left(\frac{2\pi \omega}{\omega_0}\right) \right] \text{sphere}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad (7)$$

$$K(r) = \frac{\omega_0^3}{2\pi^2} \left\{ \begin{aligned} & k_0 \frac{\sin(\omega_0 r) - \omega_0 r \cos(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^3} - \\ & - k_1 \frac{\pi^2 [\sin(\omega_0 r) + \omega_0 r \cos(\omega_0 r)] + (\omega_0 r)^2 [\sin(\omega_0 r) - \omega_0 r \cos(\omega_0 r)]}{\omega_0 r [\pi^2 - (\omega_0 r)^2]^2} + \\ & + k_2 \frac{\pi [4 \sin(\omega_0 r) + 4 \omega_0 r \cos(\omega_0 r)] + (\omega_0 r)^2 [\sin(\omega_0 r) - \omega_0 r \cos(\omega_0 r)]}{\omega_0 r [4\pi^2 - (\omega_0 r)^2]^2}. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\sigma^2 = \frac{2\pi^2 k_0 - 12k_1 + 3k_2}{12\pi^4} \omega_0^3, \quad R(r) = \frac{K(r)}{\sigma^2}.$$

2.1. Окно Дирихле ( $n = 1$ , финитный равномерный ЭС) ([1], рис. 1, а)

При переходе от обобщенного окна к окну Дирихле коэффициенты  $k_0, k_1, k_2$  в формулах (3), (4) равны:  $k_0 = 1, k_1 = 0, k_2 = 0$ .

$$F(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = \text{sinc}(\omega_0 r), \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0}{\pi}.$$

2.2. Окно Дирихле ( $n = 2$ , финитный равномерный ЭС) ([1], рис. 1, б)

Коэффициенты  $k_0, k_1, k_2$  в формулах (5), (6) равны:  $k_0=1, k_1=0, k_2=0$ .

$$F(\omega) = \text{circ}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = \frac{2J_1(\omega_0 r)}{\omega_0 r}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0^2}{4\pi}.$$

2.3. Окно Дирихле ( $n=3$ , финитный равномерный ЭС) ([1], рис. 1, в)

Коэффициенты  $k_0, k_1, k_2$  в формулах (7), (8) равны:  $k_0=1, k_1=0, k_2=0$ .

$$F(\omega) = \text{shpere}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = 3 \frac{\sin(\omega_0 r) - \omega_0 r \cos(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^3}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0^3}{6\pi^2}.$$

3.1. Окно Бартлетта ( $n=1$ , финитный треугольный ЭС) ([1], рис. 2, а)

$$F(\omega) = \left(1 - \frac{|\omega|}{\omega_0}\right) \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega_0 r}{2}\right), \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

3.2. Окно Бартлетта ( $n=2$ , финитный треугольный ЭС) ([1], рис. 2, б)

$$F(\omega) = \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \text{circ}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

$$R(r) = 3\pi \frac{J_1(\omega_0 r)H_0(\omega_0 r) - J_0(\omega_0 r)H_1(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^2}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0^2}{12\pi},$$

где  $H_0(\cdot), H_1(\cdot)$  – функции Струве.

3.3. Окно Бартлетта ( $n=3$ , финитный треугольный ЭС) ([1], рис. 2, в)

$$F(\omega) = \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \text{shpere}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad R(r) = 12 \frac{2[1 - \cos(\omega_0 r)] - \omega_0 r \sin(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^4}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0^3}{24\pi^2}.$$

4.1. Окно Парзена ( $n=1$ , свертка треугольных ЭС) (рис. 1, а)

$$F(\omega) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 6\left|\frac{\omega}{\omega_0}\right|^3, & 0 \leq |\omega| \leq \frac{\omega_0}{2}, \\ 2\left(1 - \left|\frac{\omega}{\omega_0}\right|\right)^3, & \frac{\omega_0}{2} \leq |\omega| \leq \omega_0, \\ 0, & |\omega| > \omega_0. \end{cases} \quad R(r) = \text{sinc}^4\left(\frac{\omega_0 r}{4}\right), \quad \sigma^2 = \frac{3\omega_0}{8\pi}.$$

4.2. Окно Парзена ( $n=2$ ) (рис. 1, б)

$$R(r) = \frac{80}{7\omega_0^2} \left\{ \int_0^{\frac{\omega_0}{2}} \left[1 - 6\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 6\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3\right] J_0(\omega r) \omega d\omega + \int_{\frac{\omega_0}{2}}^{\omega_0} 2\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 J_0(\omega r) \omega d\omega \right\},$$

$$\sigma^2 = \frac{7\omega_0^2}{160\pi}.$$

4.3. Окно Парзена ( $n=3$ ) (рис. 1, в)

$$R(r) = 24 \left\{ \left[1 - \cos\left(\frac{\omega_0 r}{2}\right)\right] \left[4 - \frac{\omega_0 r}{2} \sin\left(\frac{\omega_0 r}{2}\right)\right] - 2 \sin^2\left(\frac{\omega_0 r}{2}\right) \right\} \left(\frac{\omega_0 r}{2}\right)^{-6}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0^3}{64\pi^2}.$$

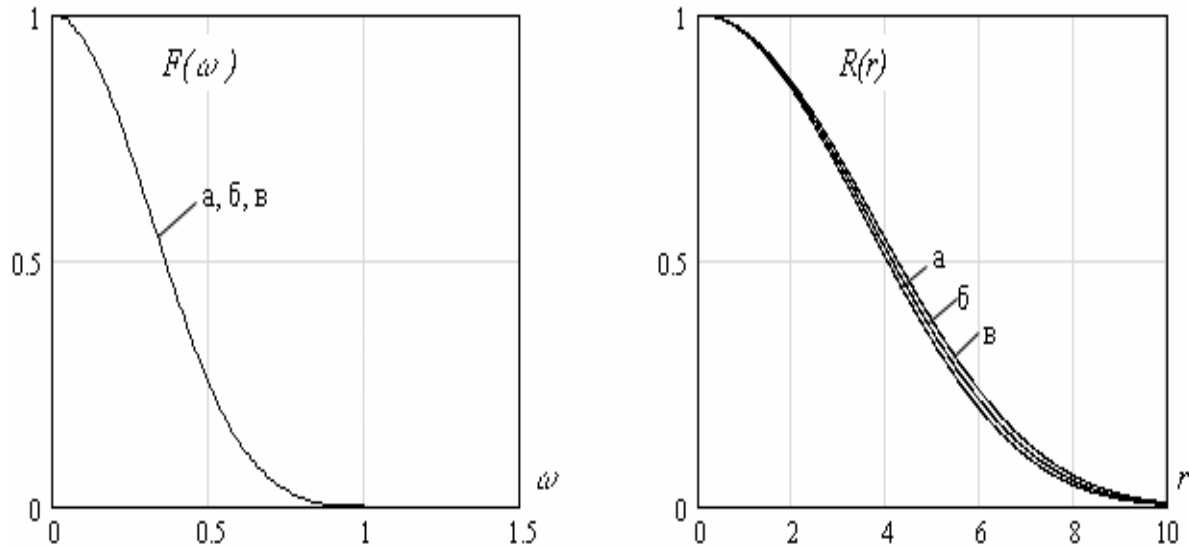


Рис. 1. Энергетический спектр в виде окна Парзена,  $\omega_0 = 1$

5.1. Окно Рисса ( $n = 1$ , финитный параболический ЭС) ([1], рис. 3, а)

$$F(\omega) = \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \Pi \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right), \quad R(r) = 3 \frac{\sin(\omega_0 r) - \omega_0 r \cos(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^3}, \quad \sigma^2 = \frac{2\omega_0}{3\pi}.$$

5.2. Окно Рисса ( $n = 2$ , финитный параболический ЭС) ([1], рис. 3, б)

$$F(\omega) = \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \text{circ} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right), \quad R(r) = 8 \frac{J_2(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^2}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0^2}{8\pi}.$$

5.3. Окно Рисса ( $n = 3$ , финитный параболический ЭС) ([1], рис. 3, в)

$$F(\omega) = \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \text{shpere} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right),$$

$$R(r) = 15 \frac{[3 - (\omega_0 r)^2] \sin(\omega_0 r) - 3\omega_0 r \cos(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^5}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0^3}{15\pi^2}.$$

6.1. Косинусоидальное окно ( $n = 1$ , финитный косинусоидальный ЭС) ([1], рис. 4, а)

$$F(\omega) = \cos \left( \frac{\pi \omega}{2\omega_0} \right) \Pi \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right), \quad R(r) = \frac{\cos(\omega_0 r)}{1 - \left( \frac{2\omega_0 r}{\pi} \right)^2}, \quad \sigma^2 = \frac{2\omega_0}{\pi^2}.$$

6.2. Косинусоидальное окно ( $n = 2$ , финитный косинусоидальный ЭС) ([1], рис. 4, б)

$$F(\omega) = \cos \left( \frac{\pi \omega}{2\omega_0} \right) \text{circ} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right), \quad K(r) = \frac{1}{2\pi} I_{\cos} \left( \frac{\pi}{2\omega_0}, r, \omega_0 \right),$$

$$\sigma^2 = \frac{\pi - 2}{\pi^3} \omega_0^2, \quad R(r) = \frac{K(r)}{\sigma^2}.$$

6.3. Косинусоидальное окно ( $n = 3$ , финитный косинусоидальный ЭС) ([1], рис. 4,в)

$$F(\omega) = \cos\left(\frac{\pi \omega}{2\omega_0}\right) \text{shpere}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

$$R(r) = \frac{\pi^4}{\pi^2 - 8} \frac{[\pi^2 - (2\omega_0 r)^2] \sin(\omega_0 r) - 8\omega_0 r \cos(\omega_0 r)}{\omega_0 r [\pi^2 - (2\omega_0 r)^2]^2}, \quad \sigma^2 = \frac{\pi^2 - 8}{\pi^5} \omega_0^3.$$

7.1. Окно Ханна ( $n = 1$ , финитный квадратно-косинусоидальный ЭС) ([1], рис. 5,а)

$$F(\omega) = 0,5 \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi \omega}{\omega_0}\right) \right] \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi \omega}{2\omega_0}\right) \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), R(r) = \frac{\text{sinc}(\omega_0 r)}{1 - \left(\frac{\omega_0 r}{\pi}\right)^2}, \sigma^2 = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

7.2. Окно Ханна ( $n = 2$ , финитный квадратно-косинусоидальный ЭС) ([1], рис. 5, б)

Коэффициенты  $k_0, k_1, k_2$  в формулах (5), (6) равны:  $k_0 = 0,5, k_1 = 0,5, k_2 = 0$ .

$$F(\omega) = 0,5 \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi \omega}{\omega_0}\right) \right] \text{circ}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi \omega}{2\omega_0}\right) \text{circ}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

$$K(r) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{J_1(\omega_0 r)}{\omega_0 r} + I_{\cos}\left(\frac{\pi}{\omega_0}, r, \omega_0\right) \right], \quad \sigma^2 = \frac{\pi^2 - 4}{8\pi^3} \omega_0^2, \quad R(r) = \frac{K(r)}{\sigma^2}.$$

Проверка по равенству Парсеваля при  $N = 5, K = 8$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_0} F^2(\omega) \omega d\omega = 0,01372, \quad 2\pi \int_0^{\infty} [\sigma^2 R(r)]^2 r dr = 0,01355, \quad \delta = 1,2\%$$

7.3. Окно Ханна ( $n = 3$ , финитный квадратно-косинусоидальный ЭС) ([1], рис. 5,в)

Коэффициенты  $k_0, k_1, k_2$  в формулах (7), (8) равны:  $k_0 = 0,5, k_1 = 0,5, k_2 = 0$ .

$$F(\omega) = 0,5 \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi \omega}{\omega_0}\right) \right] \text{shpere}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi \omega}{2\omega_0}\right) \text{shpere}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

$$R(r) = \frac{3\pi^4}{\pi^2 - 6} \left\{ \frac{[\pi^2 - 3(\omega_0 r)^2] \sin(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^3 [\pi^2 - (\omega_0 r)^2]^2} - \frac{[\pi^2 - (\omega_0 r)^2] \cos(\omega_0 r)}{(\omega_0 r)^2 [\pi^2 - (\omega_0 r)^2]^2} \right\},$$

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2 - 6}{12\pi^4} \omega_0^3.$$

8.1. Окно Хэмминга ( $n = 1$ , рис. 2, а)

Коэффициенты  $k_0, k_1, k_2$  в формулах (3), (4) равны:  $k_0 = 0,54, k_1 = 0,46, k_2 = 0$ .

$$F(\omega) = \left[ 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{\pi \omega}{\omega_0}\right) \right] \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

$$R(r) = \text{sinc}(\omega_0 r) + 0,42593 [\text{sinc}(\omega_0 r + \pi) + \text{sinc}(\omega_0 r - \pi)], \quad \sigma^2 = 0,54 \frac{\omega_0}{\pi}.$$

8.2. Окно Хэмминга ( $n = 2$ , рис. 2, б)

Коэффициенты  $k_0, k_1, k_2$  в формулах (5), (6) равны:  $k_0 = 0,54, k_1 = 0,46, k_2 = 0$ .

Проверка по равенству Парсеваля при  $N = 9$ ,  $K = 10$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_0} F^2(\omega) \omega d\omega = 0,01560, \quad 2\pi \int_0^{\infty} [\sigma^2 R(r)]^2 r dr = 0,01560.$$

8.3. Окно Хэмминга ( $n = 3$ , рис. 2, в)

Коэффициенты  $k_0, k_1, k_2$  в формулах (7), (8) равны:  $k_0 = 0,54$ ,  $k_1 = 0,46$ ,  $k_2 = 0$ .

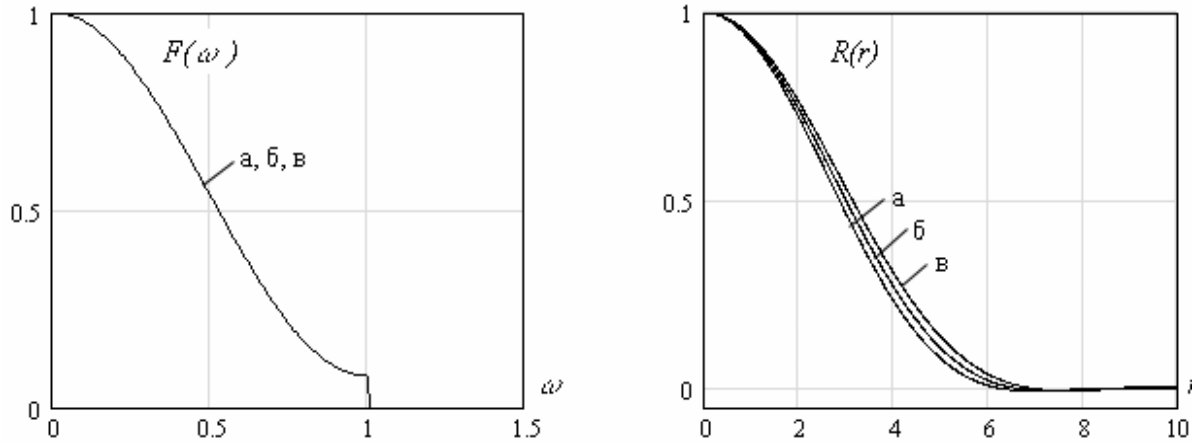


Рис. 2. Энергетический спектр в виде окна Хэмминга,  $\omega_0 = 1$

9.1. Окно Блэкмана ( $n = 1$ , рис. 3, а)

Коэффициенты  $k_0, k_1, k_2$  в формулах (3), (4) равны:  $k_0 = 0,42$ ,  $k_1 = 0,5$ ,  $k_2 = 0,08$ .

$$F(\omega) = \left[ 0,42 + 0,5 \cos\left(\frac{\pi \omega}{\omega_0}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{2\pi \omega}{\omega_0}\right) \right] \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad \sigma^2 = 0,42 \frac{\omega_0}{\pi},$$

$$R(r) = \text{sinc}(\omega_0 r) + 0,59524 [\text{sinc}(\omega_0 r + \pi) + \text{sinc}(\omega_0 r - \pi)] + \\ + 0,09524 [\text{sinc}(\omega_0 r + 2\pi) + \text{sinc}(\omega_0 r - 2\pi)].$$

9.2. Окно Блэкмана ( $n = 2$ , рис. 3, б)

Коэффициенты  $k_0, k_1, k_2$  в формулах (5), (6) равны:  $k_0 = 0,42$ ,  $k_1 = 0,5$ ,  $k_2 = 0,08$ .

Проверка по равенству Парсеваля при  $N = 12$ ,  $K = 15$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_0} F^2(\omega) \omega d\omega = 0,00926, \quad 2\pi \int_0^{\infty} [\sigma^2 R(r)]^2 r dr = 0,00926.$$

9.3. Окно Блэкмана ( $n = 3$ , рис. 3, в)

Коэффициенты  $k_0, k_1, k_2$  в формулах (7), (8) равны:  $k_0 = 0,42$ ,  $k_1 = 0,5$ ,  $k_2 = 0,08$ .

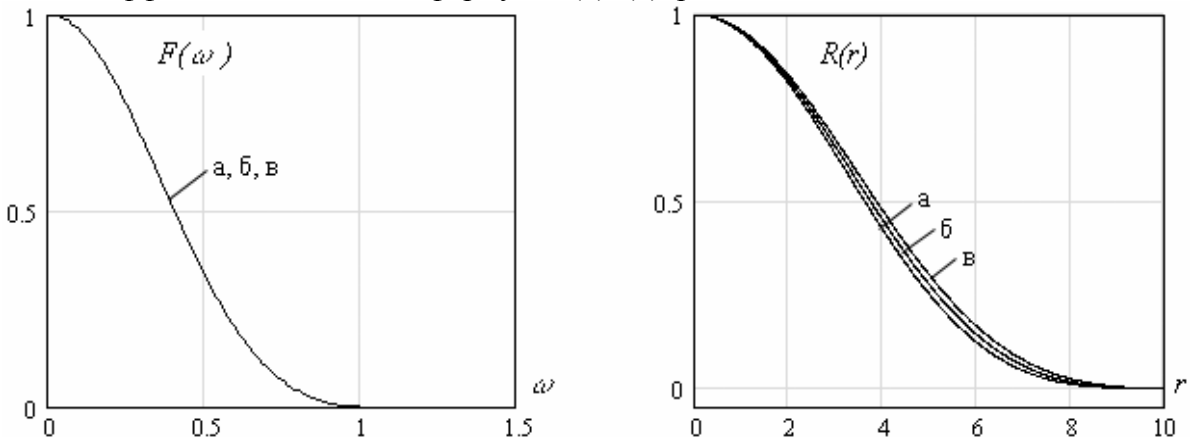


Рис. 3. Энергетический спектр в виде окна Блэкмана,  $\omega_0 = 1$

10.1. Инверсное окно Блэкмана ( $n = 1$ , рис. 4, а)

Для инверсных окон коэффициенты  $k'_0, k'_1, k'_2$  вычисляются по правилу:

$$k'_0 = 1 - k_1, \quad k'_1 = -k_1, \quad k'_2 = -k_0.$$

Для инверсного окна Блэкмана коэффициенты  $k'_0, k'_1, k'_2$  в формулах (3), (4) равны:  $k'_0 = 0,58, k'_1 = -0,5, k'_2 = -0,08$ .

10.2. Инверсное окно Блэкмана ( $n = 2$ , рис. 4, б)

Для инверсного окна Блэкмана коэффициенты  $k_0, k_1, k_2$  в формулах (5), (6) равны:  $k_0 = 0,58, k_1 = -0,5, k_2 = -0,08$ .

Проверка по равенству Парсеваля при  $N = 12, K = 15$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_0} F^2(\omega) \omega \, d\omega = 0,05424, \quad 2\pi \int_0^{\infty} [\sigma^2 R(r)]^2 r \, dr = 0,05417.$$

10.3. Инверсное окно Блэкмана ( $n = 3$ , рис. 4, в)

Для инверсного окна Блэкмана коэффициенты  $k_0, k_1, k_2$  в формулах (7), (8) равны:  $k_0 = 0,58, k_1 = -0,5, k_2 = -0,08$ .

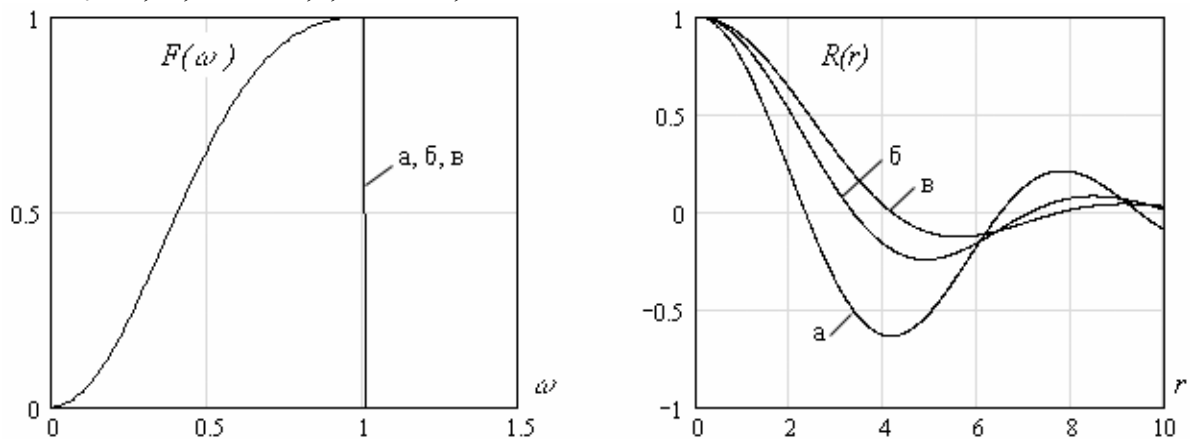


Рис. 4. Энергетический спектр в виде инверсного окна Блэкмана,  $\omega_0 = 1$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Глазов Г.Н., Костевич А.Г. Банк ковариационных функций и энергетических спектров случайных процессов и полей. 1. Эвристическое формирование. – В кн.: Интеллектуальные системы в управлении, конструировании и образовании. Томск: STT, 2004. – Вып. № 3, с. 110 – 125.