Белов В.И., Панимаскин Е.И.

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) с прореживанием по времени

Теория БПФ рассматривается во многих работах. В некоторых из них приведены программы реализации БПФ на различных алгоритмических языках. Однако описание преобразования не столь подробно, как хотелось бы, а программы сложны при анализе и творческой переработке.

В данной работе предлагается подробное описание БПФ с прореживанием по времени и ясный алгоритм его реализации, позволяющий записать БПФ окончательно на любом языке программирования.

1. Описание преобразования

Дискретный вещественный сигнал в виде конечной временной последовательности $x(nT)$ запишем как $x(n)$, где $n=\overline{0,N-1}$, N – число отсчетов, T – период дискретизации.

N – точечное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) задается формулой

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot W_N^{\,nk},\quad k=\overline{0,N-1}, \tag{1}$$

где $X(k)$ – частотный k–ый отсчет или k–ая спектральная составляющая сигнала (определяет выходную частотную последовательность, спектр сигнала), $W_N=e^{-i\frac{2\pi}{N}}=\cos\frac{2\pi}{N}-i\cdot\sin\frac{2\pi}{N}$ - комплексная экспонента, $W_N^{\,nk}=e^{-i\frac{2\pi}{N}\cdot nk}$ - ядро преобразования.

При изменении значения $n\cdot k$ на величину кратную N ядро $W_N^{\,nk}$ не изменяется (в силу периодичности синуса и косинуса). То есть ядро по верхнему индексу является периодической функцией с периодом N. Поэтому вместо произведения $n\cdot k$ можно вставить остаток от деления его на N, то есть $(n\cdot k)\mathrm{mod}\,N$ (или $\langle n\cdot k\rangle_N$). Спектральная функция $X(k)$ также имеет период N по аргументу k.

Число умножений действительных отсчетов сигнала на комплексное ядро в (1) равно N^2, а число сложений комплексных чисел – $(N-1)N$. Количество этих операций резко возрастает с увеличением N и приводит к слишком большому времени преобразования.

ДПФ стало широко применяться после изобретения быстрых алгоритмов, в основе которых лежит принцип сведения многоточечного преобразования к малоточечным. Один из них (ставший уже классическим) называется БПФ с прореживанием по времени. Этот алгоритм получен при условии, если N является степенью числа 2, то есть $N=2^{\nu}$, где ν - целое число, $\nu\geq 0$.

Основные формулы преобразования, к которым мы придем, получаются при разбиении суммы в (1) на две суммы, содержащие отсчеты с четными и нечетными номерами [1]

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(2n)\cdot W_N^{2nk}+\sum_{n=0}^{N/2-1}x(2n+1)\cdot W_N^{(2n+1)k},\qquad k=\overline{0,N-1} \tag{2}$$

По существу эта операция представляет собой изменение порядка суммирования (перегруппировку слагаемых), от которого сумма не меняется.

Можно записать $W_N^{2nk} = W_{N/2}^{nk}$, $W_N^{(2n+1)k} = W_N^k \cdot W_{N/2}^{nk}$. С учетом этого (2) примет вид

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_{N/2}^{nk} + W_N^k \cdot \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_{N/2}^{nk}, \qquad k = \overline{0, N-1} \tag{3}$$

Заметим, что суммы в (3) представляют собой $N/2$ – точечные ДПФ временных отсчетов с четными номерами в первой сумме, и нечетными номерами во второй сумме.

Обозначим, следуя [1],

$X(k) = X_\nu(k)$ – ДПФ всех $N = 2^\nu$ входных отсчетов дискретного сигнала,

$X_{\nu-1,0}(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_{N/2}^{nk}$ - ДПФ $N/2 = 2^{\nu-1}$ входных отсчетов с четными номерами (первое число в нижнем индексе равно ν - 1, а второе - четному числу (нулю)) ,

$X_{\nu-1,1}(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_{N/2}^{nk}$ - ДПФ $N/2 = 2^{\nu-1}$ входных отсчетов с нечетными номерами (второе число в нижнем индексе равно нечетному числу (единице)).

С учетом введенных обозначений получим краткую форму записи (3)

$$X_\nu(k) = X_{\nu-1,0}(k) + W_N^k \cdot X_{\nu-1,1}(k), \qquad k = \overline{0, N-1} \tag{4}$$

Спектры $X_{\nu-1,0}(k)$ и $X_{\nu-1,1}(k)$ являются периодическими функциями с периодом $N/2$ (в ядре преобразования вместо N стоит $N/2$). Величина $W_N^k = e^{-i\frac{2\pi}{N}k}$ называется множителем поворота и обладает следующим интересным свойством $W_N^{k+N/2} = e^{-i\frac{2\pi}{N}\cdot(k+N/2)} = e^{-i\frac{2\pi}{N}\cdot k} \cdot e^{-i\pi} = -W_N^k$. Это свойство предоставляет при вычислении W_N^k с номерами k от $N/2$ до $(N-1)$ использовать соответствующие значения ранее вычисленных W_N^k с номерами от 0 до $(N/2-1)$ (нужно только изменить знак).

Обычно формулу (4) разбивают на два соотношения для указанных выше номеров и получают основные формулы (базовые соотношения) преобразования Фурье в виде

$$\underset{(k=\overline{0,N-1})}{X_\nu(k)} = \begin{cases} X_\nu(k) = X_{\nu-1,0}(k) + W_N^k \cdot X_{\nu-1,1}(k), \\ X_\nu(k+N/2) = X_{\nu-1,0}(k) - W_N^k \cdot X_{\nu-1,1}(k), \qquad k = \overline{0, N/2-1} \end{cases} \tag{5}$$

Базовые соотношения уже можно назвать быстрым преобразованием Фурье (БПФ), так как число операций уменьшилось. Число умножений вещественных отсчетов сигнала на комплексное ядро равно $\left(\frac{N}{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{N^2}{2}$. К этому нужно добавить $\frac{N}{2}$ умножений комплексных чисел. Число сложений равно

$\left(\frac{N}{2} - 1\right)\frac{N}{2} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{N}{2} = \frac{N^2}{2}$.

Процесс разбиения по схеме базовых соотношений можно продолжать до тех пор, пока не придем к преобразованиям Фурье единичных отсчетов (совпадающих с самими отсчетами). Требуемое число операций при этом будет значительно меньше. В таком виде это БПФ называют БПФ с прореживанием по времени.

Для пояснения процесса разбиений рассмотрим более детально, чем в [1], пример БПФ при $N = 2^3 = 8$.

Обозначим оператор ДПФ определенных входных отсчетов через F и запишем соответствия между символами ДПФ, введенными выше, и этим оператором.

$$X_3(k) = F[x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7)], \quad k = \overline{0,7}$$

$$X_{2,0}(k) = F[x(0), x(2), x(4), x(6)], \quad k = 0,1,2$$

$$X_{2,1}(k) = F[x(1), x(3), x(5), x(7)], \quad k = 0,1,2$$

$$X_{1,0}(k) = F[x(0), x(4)], \quad k = 0;1$$

$$X_{1,1}(k) = F[x(2), x(6)], \quad k = 0;1$$

$$X_{1,2}(k) = F[x(1), x(5)], \quad k = 0;1$$

$$X_{1,3}(k) = F[x(3), x(7)], \quad k = 0;1$$

$$X_{0,0}(k) = x(0), \quad k = 0$$

$$X_{0,1}(k) = x(4), \quad k = 0$$

$$X_{0,2}(k) = x(2), \quad k = 0$$

$$X_{0,3}(k) = x(6), \quad k = 0$$

$$X_{0,4}(k) = x(1), \quad k = 0$$

$$X_{0,5}(k) = x(5), \quad k = 0$$

$$X_{0,6}(k) = x(3), \quad k = 0$$

$$X_{0,7}(k) = x(7), \quad k = 0$$

Связи между ДПФ с большим и меньшим числом точек согласно базовым соотношениям записываются следующим образом:

$$\underset{(k=\overline{0,7})}{X_3(k)} = \begin{cases} X_3(k) = X_{2,0}(k) + W_8^k \cdot X_{2,1}(k), \\ X_3(k+4) = X_{2,0}(k) - W_8^k \cdot X_{2,1}(k), \quad k = 0,1,2,3 \end{cases}$$

$$\underset{(k=0,1,2,3)}{X_{2,0}(k)} = \begin{cases} X_{2,0}(k) = X_{1,0}(k) + W_4^k \cdot X_{1,1}(k), \\ X_{2,0}(k+2) = X_{1,0}(k) - W_4^k \cdot X_{1,1}(k), \quad k = 0;1 \end{cases}$$

$$\underset{(k=0,1,2,3)}{X_{2,1}(k)} = \begin{cases} X_{2,1}(k) = X_{1,2}(k) + W_4^k \cdot X_{1,3}(k), \\ X_{2,1}(k+2) = X_{1,2}(k) - W_4^k \cdot X_{1,3}(k), \quad k = 0;1 \end{cases}$$

$$\underset{(k=0;1)}{X_{1,0}(k)} = \begin{cases} X_{1,0}(k) = X_{0,0}(k) + W_2^k \cdot X_{0,1}(k) = x(0) + x(4), \\ X_{1,0}(k+1) = X_{0,0}(k) - W_2^k \cdot X_{0,1}(k) = x(0) - x(4), \quad k = 0 \end{cases}$$

$$\underset{(k=0;1)}{X_{1,1}(k)} = \begin{cases} X_{1,1}(k) = X_{0,2}(k) + W_2^k \cdot X_{0,3}(k) = x(2) + x(6), \\ X_{1,1}(k+1) = X_{0,2}(k) - W_2^k \cdot X_{0,3}(k) = x(2) - x(6), \quad k = 0 \end{cases}$$

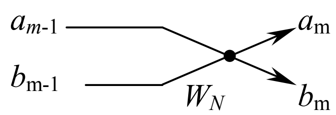
$$X_{1,2}(k) = \begin{cases} X_{1,2}(k) \quad = X_{0,4}(k) + W_2^k \cdot X_{0,5}(k) = x(1) + x(5), \\ X_{1,2}(k+1) = X_{0,4}(k) - W_2^k \cdot X_{0,5}(k) = x(1) - x(5), \qquad k = 0 \end{cases}$$
$(k=0;1)$

$$X_{1,3}(k) = \begin{cases} X_{1,3}(k) \quad = X_{0,6}(k) + W_2^k \cdot X_{0,7}(k) = x(3) + x(7), \\ X_{1,3}(k+1) = X_{0,6}(k) - W_2^k \cdot X_{0,7}(k) = x(3) - x(7), \qquad k = 0 \end{cases}$$
$(k=0;1)$

Работу БПФ можно пояснить графически, если базовые соотношения, записанные в очень краткой форме

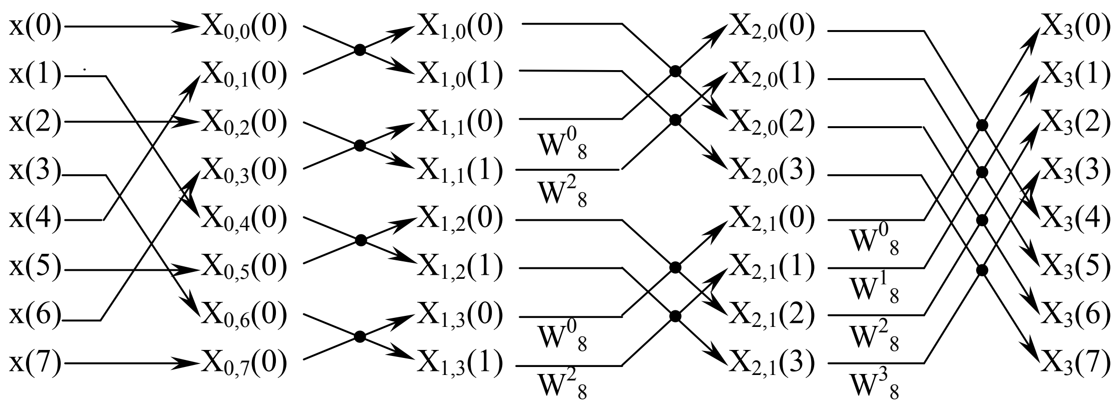
$$\begin{aligned} a_m &= a_{m-1} + W_N \cdot b_{m-1} \\ a_m &= a_{m-1} - W_N \cdot b_{m-1} \end{aligned},$$

изобразить графом



Верхней стрелке соответствует сложение,а нижней – вычитание. Предварительно $b_{\mathrm{m-1}}$ умножается на множитель поворота W_N.

Используя вышеприведенное и располагая символы ДПФ в упорядоченном виде, изобразим БПФ геометрически с помощью графа.



Граф БПФ с прореживанием по времени при $N = 8$.

Отметим, что отсчеты входной последовательности переходят в соответствующие ДПФ нулевого уровня согласно инверсии их двоичных номеров (операция называется перестановкой входных отсчетов). Например, десятичный номер $4|_{10}$ в двоичном виде запишется как $100|_2$. Инверсия числа $100|_2$ (в прочтении справа налево) запишется как $001|_2 = 1|_{10}$. Таким образом, входной отсчет под номером 4 совпадет с первым ДПФ $X_{0,\,1}(0)$. Перестановку для всех отсчетов можно показать стрелками перехода: $0 \to 0$, $1 \to 4$, $2 \to 2$, $3 \to 6$, $4 \to 1$, $5 \to 5$, $6 \to 3$, $7 \to 7$.

2. Алгоритм преобразования

Алгоритм БПФ можно составить, опираясь на граф БПФ при $N = 8$. Заметим, что ДПФ с одинаковым числом точек на графе расположены в виде столбцов. Пронумеруем ДПФ в каждом столбце цифрами от 0 до 7 (от 0 до N-1 в общем случае) сверху вниз. Выходные значения ДПФ – комплексные числа, которые можно хранить в некотором массиве. Переход в соответствии с базовыми соотношениями от ДПФ предыдущего столбца к ДПФ с удвоенным числом точек последующего столбца назовем шагом преобразования. Учитывая последовательный характер шагов преобразования, выходные значения ДПФ каждого столбца можно сохранять в одном и том же массиве (это должен быть массив комплексных чисел). Окончательно массив будет содержать результирующие значения БПФ.

Графы базовых соотношений на каждом шаге визуально группируются. Группы состоят из отдельных графов или нескольких пересекающихся между собой графов. В примере на первом шаге графа имеется 4 группы, во втором – 2 и на третьем – 1.

Введем обозначения:

$N = 2^v$ - число отсчетов обрабатываемого сигнала или число точек преобразования;

v – число шагов преобразования;

step – номер шага, *step* = 0,…, v – 1;

group – номер группы графов, *group* = 0, …, (*group_max* – 1),

где *group_max* – число групп (зависит от номера шага);

input – номер ДПФ, выход которого соединен с верхним входом графа базового соотношения;

input +*add* - номер ДПФ, выход которого соединен с нижним входом этого графа;

add – разность соответствующих номеров;

pow – степень множителя поворота (в тексте *pow* соответствует показателю k в W_N^k).

Переменные связаны между собой следующим образом:

$$add = 2^{step}$$

$$group\_\max = \frac{N}{2^{step+1}} = 2^{v-step-1}$$

$$input = group \cdot 2^{step+1},..., group \cdot 2^{step+1} + 2^{step} - 1$$

$$pow = 2^{step-v-1} \cdot \langle input \rangle_{2^{step+1}} = group\_\max \cdot \langle input \rangle_{2^{step+1}}.$$

Эти соотношения получены при анализе графа БПФ.

Для приведенного графа построена таблица, в которой для каждого шага преобразования занесены индексы и их пределы изменения, используемые в циклах программы. Ниже приведен алгоритм программы. Его особенность – результат получается в массиве входных данных. Алгоритм построен для случая комплексных входных данных, как более общий случай.

Перестановка	1	2	3
	$\mathrm{step} = 0\ \ add = 1$ $group = 0,...,3$ $group = 0\ \ input = 0$ $group = 1\ \ input = 2$ $group = 2\ \ input = 4$ $group = 3\ \ input = 6$	$\mathrm{step} = 1\ \ add = 2$ $group = 0,...,1$ $group = 0\ \ input = 0,...,1$ $group = 1\ \ input = 4,...,5$	$\mathrm{step} = 2\ \ add = 4$ $group = 0$ $input = 0,...,3$

Стиль написания алгоритма взят из [2].

Алгоритм БПФ с прореживанием по времени.

Входные данные в алгоритме:

X(k), $k = 0,\ldots, N - 1$ - массив комплексных входных и выходных данных.

Для $k = 0,\ldots, N - 1$ установить: $W(k+1) \leftarrow \cos\left(\frac{2\pi}{N}\cdot k\right) - i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{N}\cdot k\right)$.

Установить: $step \leftarrow 0$, $group\_max \leftarrow 2^{v-1}$, $add \leftarrow 1$.

1. Перестановка элементов массива *X(k)*.
2. Если $step = v$, перейти к шагу 9.
3. $group \leftarrow 0$.
4. Если $group = group\_max$: $step \leftarrow step + 1$, $add \leftarrow add \cdot 2$, $group\_max \leftarrow group\_max/2$, перейти к шагу 2.
5. $input \leftarrow group\ 2^{step+1}$.
6. Если $input = group\ 2^{step+1} + 2^{step}$: $group \leftarrow group + 1$, перейти к шагу 4.
7. [Базовая операция]
   $pow \leftarrow group\_max \cdot \langle input \rangle_{2^{step+1}}$,
   $t \leftarrow X(input + add) \cdot \mathrm{W}(pow + 1)$,
   $X(input + add) \leftarrow X(input) - t$,
   $X(input) \leftarrow X(input) + t$.
8. $input \leftarrow input + 1$, перейти к шагу 6.
9. Конец.

Алгоритм двоично-инверсной перестановки.

1. $k \leftarrow 0$.
2. Если $k = N$, то выполнение алгоритма прекращается.
3. $n \leftarrow m \leftarrow 0$ ($n \leftarrow 0$, $m \leftarrow 0$).
4. Если $m = v$: перейти к шагу 7.
5. Если бит с номером m (0-ой бит - самый младший) числа k равен 1, то $n \leftarrow n + 2^{v-m-1}$.
6. $m \leftarrow m + 1$, перейти к шагу 4.
7. Если $k < n$: $X(k) \leftrightarrow X(n)$.
8. $k \leftarrow k + 1$, перейти к шагу 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. Справочник. –М.: Радио и связь, 1985.
2. Кнут Д. Э. Искусство программирования. Том 1. – Москва, Санкт-Петербург, Киев: Вильямс, 2000.